第 7 章 リアプノフの安定性理論

7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と漸近安定性

キーワード：リアプノフの安定定理

学習目標：リアプノフの安定定理を習得する。

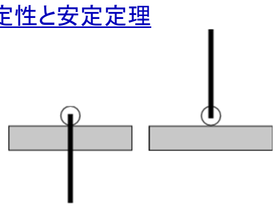
7 リアプノフの安定性理論

7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

平衡点

(a) 振子が真下で静止した状態

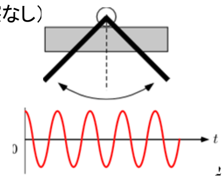
(b) 振子が真上で静止した状態



(i) 振子が真下で静止した状態（粘性摩擦なし）

平衡点の近傍で振動を持続する

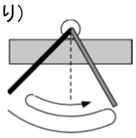
（リアプノフの意味で）安定

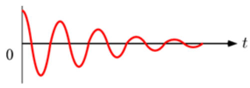


(ii) 振子が真下で静止した状態（粘性摩擦あり）

振子の揺れが減衰していき，真下で静止する

漸近安定





(iii) 振子が真上で静止した状態

少しでも平衡状態から離れると，真上で静止した状態には留まることができない

不安定

一般的な非線形な零入力システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \qquad (7.1)$$

リアプノフの意味での安定性

(7.1)式の平衡点を$x_e = 0$とする。

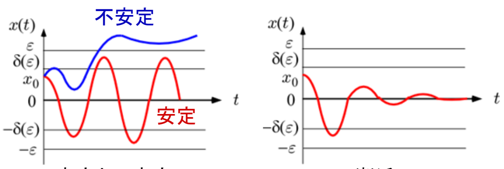
(i) 任意に与えられた$\varepsilon > 0$に対して$\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し，$\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$のとき，任意の時刻 t で $\|x(t)\| < \varepsilon$ であれば，平衡点は$x_e = 0$は安定であるという。つまり，このことは，$x_e = 0$ 近傍の任意の$x(0) = x_0$ に対して，任意の時刻 t で $x(t)$ が $x_e = 0$ 近傍に留まり続けることを意味する。

(ii) 平衡点 $x_e = 0$ が安定であり，しかも，

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

であるとき，平衡点 $x_e = 0$ は漸近安定であるという。つまり，このことは，$x_e = 0$ 近傍の任意の $x(0) = x_0$に対して，$t \to \infty$ で $x(t) \to 0$ となることを意味する。

(iii) 平衡点 $x_e = 0$ が安定でないとき，平衡点 $x_e = 0$ は不安定であるという



安定と不安定　　漸近

[例7.1]

$$J\ddot{\theta}(t) = -\mu\dot{\theta}(t) - Mgl\sin\theta(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{Mgl}{J}\sin x_1(t) - \frac{\mu}{J}x_2(t) \end{bmatrix}$$

平衡点

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2e} \\ -\frac{Mgl}{J}\sin x_{1e} - \frac{\mu}{J}x_{2e} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ \sin x_{1e} = 0 \end{cases}$$

力学的エネルギー

$$\phi(x(t)) = \underbrace{\frac{1}{2}Jx_2(t)^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{Mgl\,(1 - \cos x_1(t))}_{\text{位置エネルギー}}$$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}Jx_2(t)^2 + Mgl\,(1-\cos x_1(t))$$

$|x_1(t)| < \pi$ の領域

$x(t)=0$ のときに限り $\phi(x(t))=0$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}J\cdot 0 + Mgl\,(1-\cos 0) = 0$$

それ以外の $x(t)$ に対して $\phi(x(t))>0$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}Jx_2(t)^2 + Mgl\,(1-\cos x_1(t)) > 0$$ 正定関数

力学的エネルギーの時間微分 $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$

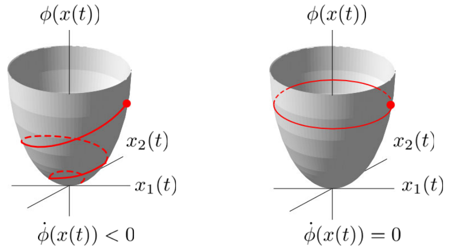
$$\begin{aligned}\dot{\phi}(x(t)) &= Jx_2(t)\dot{x}_2(t) + Mgl\,\underline{\dot{x}_1(t)\sin x_1(t)} \\ &= (J\dot{x}_2(t) + Mgl\sin x_1(t))\,x_2(t) \\ &= -\mu x_2(t)^2\end{aligned}$$

$\dfrac{d}{dx}\cos x_1(t)$

正定関数 $\phi(x(t))$ が単調非増加

7

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2}Jx_2(t)^2 + Mgl\,(1-\cos x_1(t)) > 0$$



8

リアプノフの安定定理

非線形な零入力システム $\dot{x}(t)=f(x(t)),\ \ x(0)=x_0$ に対して，原点 $x(t)=0$ を含む領域 $\mathcal{U}$ および

$$\phi(x(t))>0\ \ (\forall x(t)\in\mathcal{U},\ x(t)\neq 0)$$

という正定関数を考える。このとき，以下のことがいえる。

(a) $\dot{\phi}(x(t))$ が半負定(準負定)関数

$$\dot{\phi}(x(t))\le 0\ \ (\forall x(t)\in\mathcal{U},\ x(t)\neq 0)$$

であれば，平衡点 $x_e=0$ は安定である。

(b) $\dot{\phi}(x(t))$ が負定関数

$$\dot{\phi}(x(t))<0\ \ (\forall x(t)\in\mathcal{U},\ x(t)\neq 0)$$

であれば，平衡点 $x_e=0$ は漸近安定である。

9

7 リアプノフの安定性理論

7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と漸近安定性

システム

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\ \ x(0)=x_0 \qquad (7.3)$$

正定対称行列 $P=P^T>0$ を用いて，2次形式の正定関数

$$\phi(x(t)) = x(t)^TPx(t)>0\ \ (\forall x(t)\neq 0),\ \ P=P^T>0 \qquad (7.12)$$

時間微分

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(x(t)) &= x(t)^TP\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^TPx(t) \\ &= x(t)^TPAx(t) + \underline{(Ax(t))}^TPx(t) \\ &= x(t)^TPAx(t) + x(t)^TA^TPx(t) \\ &= x(t)^T\left(PA+A^TP\right)x(t)\end{aligned}$$

$(Ax(t))^T = x(t)^TA^T$

10

リアプノフ不等式 $PA+A^TP<0$

を満足する解 $P=P^T>0$ が存在すれば，任意の $x(t)\neq 0$ に対して $\dot{\phi}(x(t))<0$ であり，(7.12) 式の $\phi(x(t))$ はリアプノフ関数となり，線形な零入力システム (7.3) 式の平衡点 $x_e=0$ は漸近安定である。

線形システムに対するリアプノフの安定定理(その1)

線形な零入力システム(7.3)式を考える。任意の与えられた $Q=Q^T>0$ に対し

リアプノフ方程式 $PA+A^TP=-Q\ \ (<0)$

を満足する解 $P=P^T>0$ が唯一存在することと，線形な零入力システム (7.3) 式が漸近安定(A が安定行列)であることは等価である。

11

[例7.2]

$$\dot{x}(t)=Ax(t),\ \ A=\begin{bmatrix}0 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}$$

(解法1)

A の固有値 $-1\pm 2j$

(解法2)

$$P=P^T=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix},\ \ Q=Q^T=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

とおく。リアプノフ方程式

$$PA+A^TP=-Q$$

$$\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -5\\ 1 & -2\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2p_{12} & -5p_{11}-2p_{12}+p_{22}\\ -5p_{11}-2p_{12}+p_{22} & -10p_{12}-4p_{22}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$P=P^T=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

12

$P=P^T$ の正定を判断

(a) 固有値による判別方法

$$|\lambda I - P| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$ よって $P=P^T>0$

(b) シルベスターの判別方法

$P=P^T$ の主座行列式

$$p_{11} = \frac{1}{2} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{2} > 0$$

よって $P=P^T>0$

13

線形システムに対するリアプノフの安定定理(その2)

線形な零入力システム(7.3)式を考える。与えられた半正定対称行列 $Q=Q_0^TQ_0 \geq 0$ が次式を満足し，(Q_0, A) が可観測であるとする。

$$\mathrm{rank} V_o = n, \quad V_o = \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_oA \\ \vdots \\ Q_oA^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{nk\times n}$$ （列フルランク）

ただし，$Q\in R^{k\times n}$，$k \leq n$ である。このとき

リアプノフ方程式　$PA + A^TP = -Q_o^TQ_o \quad (\leq 0)$

を満足する解 $P=P^T>0$ が唯一存在することと，線形な零入力システム(7.3)式が漸近安定(A が安定行列)であることは等価である。

14

[例7.3]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$Q_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると

$$Q = Q_o^TQ_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad V_o = \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_oA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{rank} V_o = 2$ より (Q_0, A) は可観測である。

リアプノフ方程式　$PA + A^TP = -Q_o^TQ_o$

を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} \\ -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} & -10p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[例7.2]と同じ

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

15

$P=P^T$ の正定を判断

(a) 固有値による判別方法

$$|\lambda I - P| = \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{5}{20} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{1}{20}, \frac{1}{4}$$ よって $P=P^T>0$

(b) シルベスターの判別方法

$P=P^T$ の主座行列式

$$p_{11} = \frac{1}{20} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{80} > 0$$

よって $P=P^T>0$

16

[MATLAB演習]

7.3.1 リアプノフ方程式

7.3.2 リアプノフ関数の挙動

17

第 7 章　リアプノフの安定性理論

7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と漸近安定性

キーワード：リアプノフの安定定理

学習目標：リアプノフの安定定理を習得する。

18

固有値 $\lambda_1,\ \lambda_2$ が正なら $x^T P x > 0$

$$
\begin{aligned}
x^T P x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{12} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2
\end{aligned}
$$

19

対角行列の計算

$$
\begin{aligned}
x^T P x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} P_{11} x_1 & P_{22} x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= P_{11} x_1^2 + P_{22} x_2^2
\end{aligned}
$$

ベクトルの計算

$$
\begin{aligned}
x^T x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\
&= x_1^2 + x_2^2
\end{aligned}
$$

20