

# 第7章 リアプノフの安定性理論

7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と  
漸近安定性

キーワード：リアプノフの安定定理

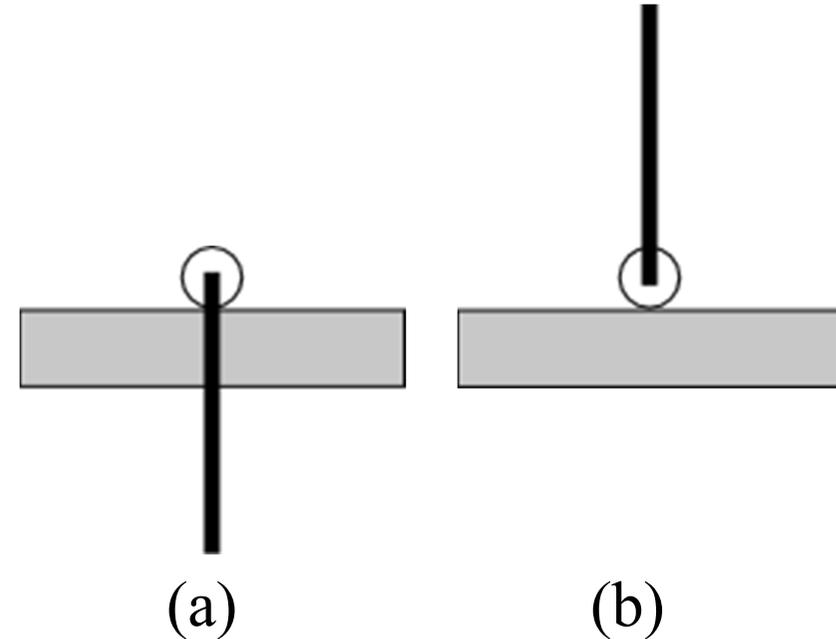
学習目標：リアプノフの安定定理を習得する。

# 7 リアプノフの安定性理論

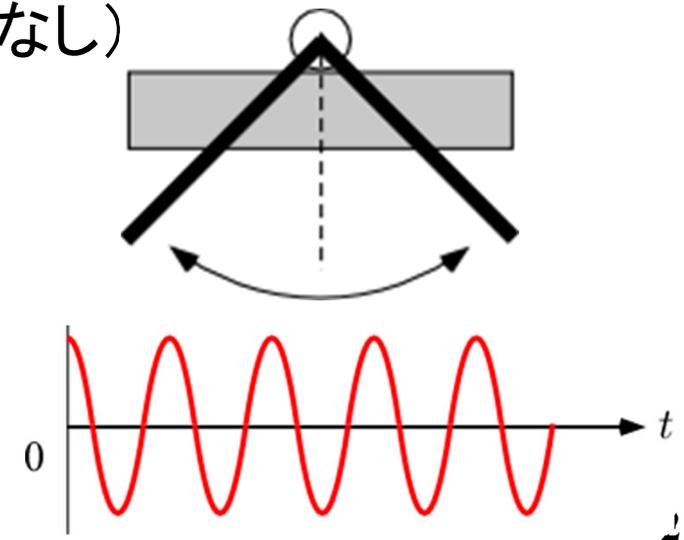
## 7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

### 平衡点

- (a) 振子が真下で静止した状態
- (b) 振子が真上で静止した状態



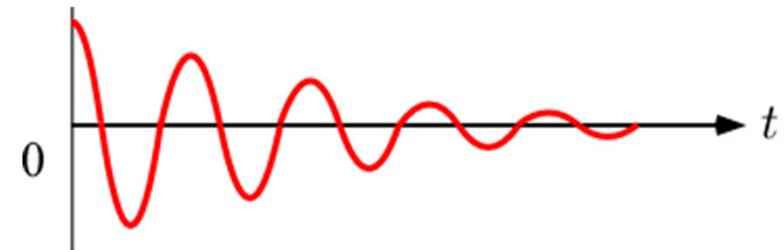
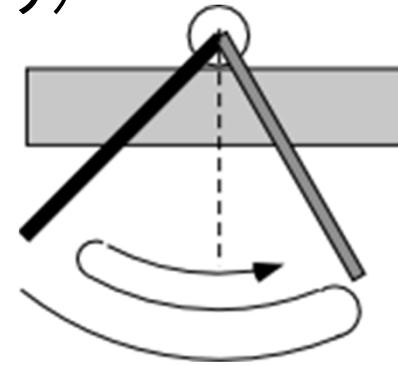
- (i) 振子が真下で静止した状態 (粘性摩擦なし)  
平衡点の近傍で振動を持続する  
(リアプノフの意味で) 安定



(ii) 振子が真下で静止した状態(粘性摩擦あり)

振子の揺れが減衰していき, 真下で  
静止する

漸近安定



(iii) 振子が真上で静止した状態

少しでも平衡状態から離れると, 真上で静止した状態には  
留まることができない

不安定

## 一般的な非線形な零入力システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (7.1)$$

### リアプノフの意味での安定性

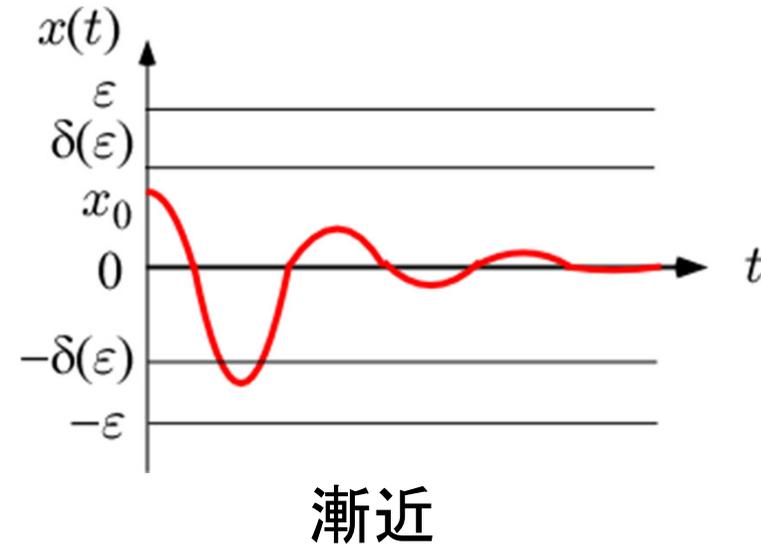
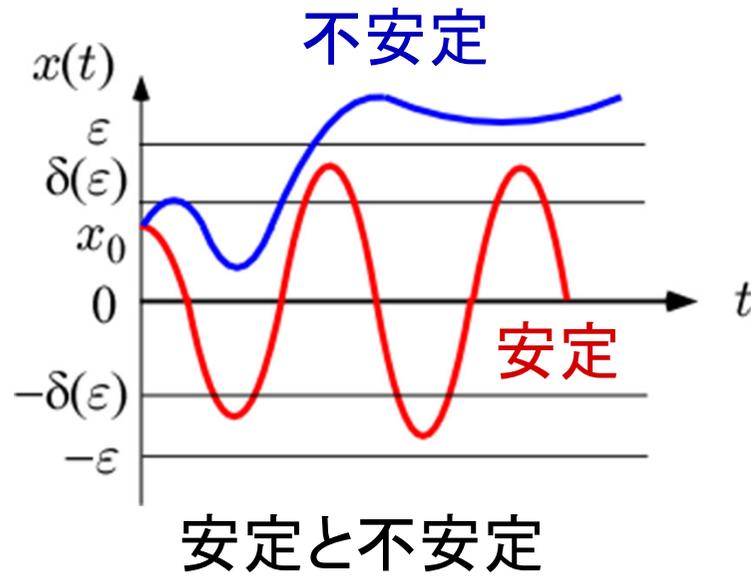
(7.1) 式の平衡点を  $x_e = 0$  とする。

- (i) 任意に与えられた  $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta(\varepsilon) > 0$  が存在し,  $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$  のとき, 任意の時刻  $t$  で  $\|x(t)\| < \varepsilon$  であれば, 平衡点は  $x_e = 0$  は**安定**であるという。つまり, このことは,  $x_e = 0$  近傍の任意の  $x(0) = x_0$  に対して, 任意の時刻  $t$  で  $x(t)$  が  $x_e = 0$  近傍に留まり続けることを意味する。
- (ii) 平衡点  $x_e = 0$  が安定であり, しかも,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t)\| = 0$$

であるとき, 平衡点  $x_e = 0$  は**漸近安定**であるという。つまり, このことは,  $x_e = 0$  近傍の任意の  $x(0) = x_0$  に対して,  $t \rightarrow \infty$  で  $x(t) \rightarrow 0$  となることを意味する。

(iii) 平衡点  $x_e = 0$  が安定でないとき, 平衡点  $x_e = 0$  は不安定であるという



## [ 例7.1 ]

$$J\ddot{\theta}(t) = -\mu\dot{\theta}(t) - Mgl \sin \theta(t)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \quad \text{とおく}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\frac{Mgl}{J} \sin x_1(t) - \frac{\mu}{J} x_2(t) \end{bmatrix}$$

### 平衡点

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{2e} \\ -\frac{Mgl}{J} \sin x_{1e} - \frac{\mu}{J} x_{2e} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_{2e} = 0 \\ \sin x_{1e} = 0 \end{cases}$$

### 力学的エネルギー

$$\phi(x(t)) = \underbrace{\frac{1}{2} J x_2(t)^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{Mgl (1 - \cos x_1(t))}_{\text{位置エネルギー}}$$

運動エネルギー      位置エネルギー

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2} J x_2(t)^2 + Mgl (1 - \cos x_1(t))$$

$|x_1(t)| < \pi$  の領域

$x(t) = 0$  のときに限り  $\phi(x(t)) = 0$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2} J \cdot 0 + Mgl (1 - \cos 0) = 0$$

それ以外の  $x(t)$  に対して  $\phi(x(t)) > 0$

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2} J x_2(t)^2 + Mgl (1 - \cos x_1(t)) > 0 \quad \text{正定関数}$$

力学的エネルギーの時間微分

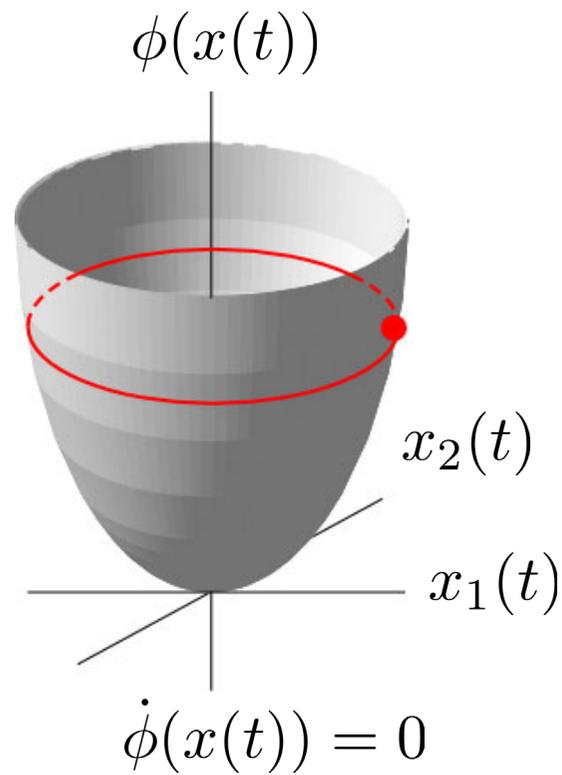
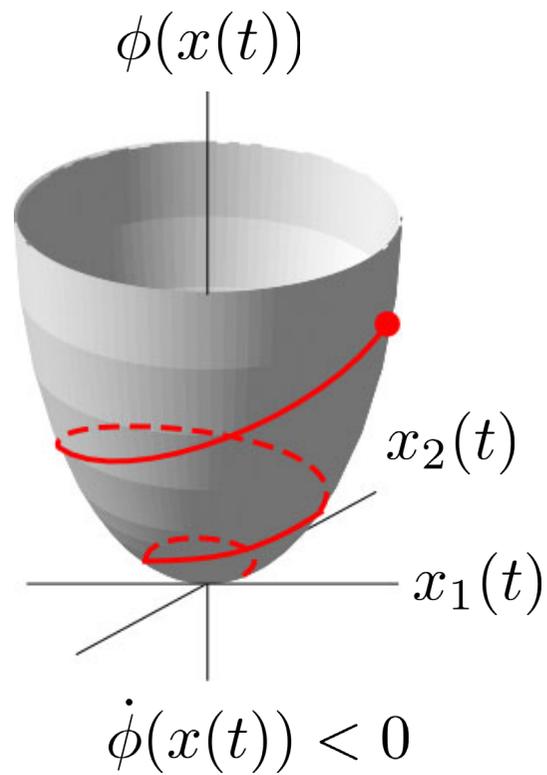
$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x(t)) &= J x_2(t) \dot{x}_2(t) + Mgl \dot{x}_1(t) \sin x_1(t) \\ &= (J \dot{x}_2(t) + Mgl \sin x_1(t)) x_2(t) \\ &= -\mu x_2(t)^2 \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \cos x_1(t)$$

正定関数  $\phi(x(t))$  が単調非増加

$$\phi(x(t)) = \frac{1}{2} J x_2(t)^2 + Mgl (1 - \cos x_1(t)) > 0$$



## リアプノフの安定定理

非線形な零入力システム  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ,  $x(0) = x_0$  に対して,  
原点  $x(t) = 0$  を含む領域  $\mathcal{U}$  および

$$\phi(x(t)) > 0 \quad (\forall x(t) \in \mathcal{U}, x(t) \neq 0)$$

という**正定関数**を考える。このとき、以下のことがいえる。

(a)  $\dot{\phi}(x(t))$  が半負定(準負定)関数

$$\dot{\phi}(x(t)) \leq 0 \quad (\forall x(t) \in \mathcal{U}, x(t) \neq 0)$$

であれば、平衡点  $x_e = 0$  は**安定**である。

(b)  $\dot{\phi}(x(t))$  が負定関数

$$\dot{\phi}(x(t)) < 0 \quad (\forall x(t) \in \mathcal{U}, x(t) \neq 0)$$

であれば、平衡点  $x_e = 0$  は**漸近安定**である。

## 7 リアプノフの安定性理論

### 7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と

#### 漸近安定性

#### システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \quad (7.3)$$

**正定対称行列**  $P = P^T > 0$  を用いて, 2次形式の**正定関数**

$$\phi(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0 \quad (\forall x(t) \neq 0), \quad P = P^T > 0 \quad (7.12)$$

#### 時間微分

$$\dot{\phi}(x(t)) = x(t)^T P \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T P x(t)$$

$$= x(t)^T P A x(t) + \underline{(Ax(t))^T} P x(t)$$

$$= x(t)^T P A x(t) + x(t)^T A^T P x(t)$$

$$(Ax(t))^T = x(t)^T A^T$$

$$= x(t)^T (PA + A^T P) x(t)$$

リアプノフ不等式  $PA + A^T P < 0$

を満足する解  $P = P^T > 0$  が存在すれば, 任意の  $x(t) \neq 0$  に対して  $\dot{\phi}(x(t)) < 0$  であり, (7.12) 式の  $\phi(x(t))$  はリアプノフ関数となり, 線形な零入力システム (7.3) 式の平衡点  $x_e = 0$  は漸近安定である。

線形システムに対するリアプノフの安定定理(その1)

線形な零入力システム(7.3)式を考える。任意の与えられた  $Q = Q^T > 0$  に対し

リアプノフ方程式  $PA + A^T P = -Q (< 0)$

を満足する解  $P = P^T > 0$  が唯一存在することと, 線形な零入力システム (7.3) 式が漸近安定 ( $A$  が安定行列) であることは等価である。

## [ 例7.2 ]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

(解法1)

$A$  の固有値  $-1 \pm 2j$

(解法2)

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}, \quad Q = Q^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

とおく。リアプノフ方程式

$$PA + A^T P = -Q$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} \\ -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} & -10p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$P = P^T$  の正定を判断

(a) 固有値による判別方法

$$\begin{aligned} |\lambda I - P| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda - \frac{3}{2} \end{array} \right| \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{よって } P = P^T > 0$$

(b) シルベスターの判別方法

$P = P^T$  の主座行列式

$$p_{11} = \frac{1}{2} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{2} > 0$$

$$\text{よって } P = P^T > 0$$

## 線形システムに対するリアプノフの安定定理(その2)

線形な零入力システム(7.3)式を考える。与えられた半正定対称行列  $Q = Q_0^T Q_0 \geq 0$  が次式を満足し、 $(Q_0, A)$  が可観測であると  
する。

$$\text{rank} V_o = n, \quad V_o = \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_o A \\ \vdots \\ Q_o A^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{nk \times n} \quad (\text{列フルランク})$$

ただし、 $Q \in R^{k \times n}$ ,  $k \leq n$  である。このとき

$$\text{リアプノフ方程式} \quad PA + A^T P = -Q_o^T Q_o \quad (\leq 0)$$

を満足する解  $P = P^T > 0$  が唯一存在することと、線形な零入力システム(7.3)式が漸近安定( $A$ が安定行列)であることは等価である。

### [ 例7.3 ]

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$Q_o = [0 \quad 1]$  とすると

$$Q = Q_o^T Q_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad V_o = \begin{bmatrix} Q_o \\ Q_o A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$\text{rank} V_o = 2$  より  $(Q_o, A)$  は可観測である。

リアプノフ方程式  $PA + A^T P = -Q_o^T Q_o$

を満足する解は

$$\begin{bmatrix} 2p_{12} & -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} \\ -5p_{11} - 2p_{12} + p_{22} & -10p_{12} - 4p_{22} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

[例7.2]と同じ

$P = P^T$  の正定を判断

(a) 固有値による判別方法

$$\begin{aligned} |\lambda I - P| &= \left| \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{array}{cc} \lambda - \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \lambda - \frac{5}{20} \end{array} \right| \\ &= \left( \lambda - \frac{1}{20} \right) \left( \lambda - \frac{1}{4} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{20}, \frac{1}{4} \quad \text{よって } P = P^T > 0$$

(b) シルベスターの判別方法

$P = P^T$  の主座行列式

$$p_{11} = \frac{1}{20} > 0,$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = p_{11}p_{22} - p_{12}^2 = \frac{1}{80} > 0$$

$$\text{よって } P = P^T > 0$$

## [ MATLAB演習 ]

7.3.1 リアプノフ方程式

7.3.2 リアプノフ関数の挙動

# 第7章 リアプノフの安定性理論

7.1 リアプノフの意味での安定性と安定定理

7.2 線形システムに対するリアプノフの安定定理と  
漸近安定性

キーワード：リアプノフの安定定理

学習目標：リアプノフの安定定理を習得する。

固有値  $\lambda_1, \lambda_2$  が正なら  $x^T P x > 0$

$$\begin{aligned} x^T P x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 \end{aligned}$$

## 対角行列の計算

$$\begin{aligned}x^T P x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{11}x_1 & P_{22}x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= P_{11}x_1^2 + P_{22}x_2^2\end{aligned}$$

## ベクトルの計算

$$\begin{aligned}x^T x &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1^2 + x_2^2\end{aligned}$$