

2024 年度 計測制御工学 前期 第 10 回レポート (模範解答)

EM 専攻 1 年 番号 _____ 氏名 _____

【問題 1】

1 慣性システム

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

において, 評価関数

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + r u(t)^2) dt$$

の重みが次式により与えられたとき, 以下の問いに答えよ。

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad r = 1$$

(1) リカッチ方程式の正定対称解 P を求めよ。

$$PA + A^T P - \frac{1}{r} P b b^T P + Q = 0$$

ただし, P の要素はすべて正となることを用いてよい。(2) コントローラのゲイン k を求めよ。

$$u = kx(t), \quad k = -\frac{1}{r} b^T P$$

【解答】

(1) $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とおくと,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(1-1)

式整理すると

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} -p_{12} - p_{12} & p_{11} - 2p_{12} - p_{22} \\ -p_{22} + p_{11} - 2p_{12} & 2(p_{12} - 2p_{22}) \end{bmatrix} \\ & - \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0 \end{aligned}$$

(1-2)

$$\begin{bmatrix} -2p_{12} - p_{12}^2 + 3 & p_{11} - 2p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} \\ p_{11} - 2p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} & 2(p_{12} - 2p_{22}) - p_{22}^2 + 3 \end{bmatrix} = 0$$

(1-3)

となる。(1,1) 要素から

$$-2p_{12} - p_{12}^2 + 3 = 0 \quad (1-4)$$

$$p_{12}^2 + 2p_{12} - 3 = 0 \quad (1-5)$$

$$(p_{12} + 3)(p_{12} - 1) = 0 \quad (1-6)$$

 $p_{12} > 0$ より $p_{12} = 1$ となる。

(2,2) 要素から

$$2(p_{12} - 2p_{22}) - p_{22}^2 + 3 = 0 \quad (1-7)$$

$$2(1 - 2p_{22}) - p_{22}^2 + 3 = 0 \quad (1-8)$$

$$p_{22}^2 + 4p_{22} - 5 = 0 \quad (1-9)$$

$$(p_{22} + 5)(p_{22} - 1) = 0 \quad (1-10)$$

 $p_{22} > 0$ より $p_{22} = 1$ となる。

(1,2) 要素から

$$p_{11} - 2p_{12} - p_{22} - p_{12}p_{22} = 0$$

$$p_{11} - 2 - 1 - 1 = 0$$

$$p_{11} = 4 \quad (1-11)$$

より, $p_{11} = 4$ となる。よって, P は

$$P = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

となる。t

(2) k は

$$k = - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

となる。