

第 8 章 最適レギュレータ

8.1 最適レギュレータ(LQ最適制御)によるコントローラ設計

キーワード：最適レギュレータ, 最適制御

学習目標：最適レギュレータによるコントローラの設計法を習得する。

8 最適レギュレータ

8.1 最適レギュレータ(LQ最適制御)によるコントローラ設計

システム

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = x(t) \end{cases}$$

コントローラ

$$\mathcal{K} : u(t) = Kx(t)$$

極配置法による問題点

- 極の実部を負側に大きくするに従い、応答の収束の速さは向上するが、 K も大きくなる。
- 多入力システムの場合、最もよい制御を実現する K を設計するための極をいくつにすればよいか不明である。

[例8.1]

システム $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

コントローラ $\mathcal{K} : u(t) = kx(t)$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$k = [5 \quad -1]$$

$A_{cl} = A + Bk$ の固有値が $-1 \pm 2j$

$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ としたときの状態 $x_1(t)$, $x_2(t)$, 操作量 $u(t)$ と

それらの2乗積分

$$J_{x_1} = \int_0^\infty x_1(t)^2 dt > 0 \quad J_{x_2} = \int_0^\infty x_2(t)^2 dt > 0$$

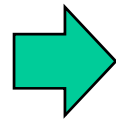
$$J_u = \int_0^\infty u(t)^2 dt > 0$$

- “状態 $x_1(t)$, $x_2(t)$ の 0 への収束の速さ”を J_{x_1} , J_{x_2} の大きさに評価する。(J_{x_1} , J_{x_2} が小さいほど状態 $x_1(t)$, $x_2(t)$ の収束性がよい)
- “操作量 $u(t)$ の大きさ”を J_u の大きさに評価する(J_u が小さいほど操作量 $u(t)$ が過大でない)

$$J_{x_1} = \int_0^{\infty} x_1(t)^2 dt = 0.45$$

$$J_{x_2} = \int_0^{\infty} x_2(t)^2 dt = 1.25$$

$$J_u = \int_0^{\infty} u(t)^2 dt = 17.5$$



$$J_{x_1} + J_{x_2} + J_u \doteq J_u$$

J_{x_1} , J_{x_2} の大きさが影響しない



重みをつける

$$J = q_1 J_{x_1} + q_2 J_{x_2} + r J_u$$

$$= \int_0^{\infty} (q_1 x_1(t)^2 + q_2 x_2(t)^2 + r u(t)^2) dt$$

評価関数

$$J = \sum_{i=1}^n q_i J_{x_i} + \sum_{j=1}^p r_j J_{u_j} = \int_0^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n q_i x_i(t)^2 + \sum_{j=1}^p r_j u_j(t)^2 \right) dt$$

評価関数の重み $q_i \geq 0, r_j > 0$ の役割

- $q_i \geq 0$ を大きくすれば, “状態 $x_i(t)$ の 0 への収束の速さ (J_{x_i} を小さくすること)” を重視することになる。
- $r_j > 0$ を大きくすれば, “操作量 $u_j(t)$ が過大でないこと (J_{u_j} を小さくすること)” を重視することになる。

実際には, 以下を繰り返す

- $q_i \geq 0, r_j > 0$ を調整してコントローラを設計
- 得られたコントローラを用いたシミュレーションによる評価

最適レギュレータ問題(LQ最適制御問題)

n 次システムの可制御な制御対象

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = x(t) \end{cases}$$

を考える。与えられた

(i) $Q = Q^T > 0$

(ii) (Q_0, A) が可観測かつ $Q = Q^T = Q_0^T Q_0 \geq 0$

のいずれかを満足する重み行列 $Q = Q^T$ および $R = R^T > 0$ に対して, 評価関数

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt$$

を最小化する状態フィードバック形式のコントローラ $u(t) = Kx(t)$ を求める問題を最適レギュレータ問題とよぶ。

最適レギュレータ問題の可解条件

可制御な制御対象

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ \eta(t) = x(t) \end{cases}$$

評価関数

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt$$

が与えられたとする。このとき、評価関数を最小化するコントローラ $u(t) = Kx(t)$ のゲイン $K = K_{opt}$ は唯一に定まり

$$K_{opt} := -R^{-1}B^T P_{opt}$$

により与えられる。ただし、 $P = P_{opt}$ は

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

を満足する実数の正定対称解 $P = P^T > 0$ であり、唯一に定まる。また、評価関数の最小値は次式である。

$$J_{min} = x_0^T P_{opt} x_0$$

[例8.2]

システム $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + r u(t)^2) dt$$

(1) $Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1 > 0$

(2) $Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (q_1 > 0), \quad r = 1 > 0$

リカッチ方程式の正定対称解を $P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$ とする

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \\ - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -10p_{12} & p_{11} - p_{12} \\ -10p_{22} & p_{21} - p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10p_{12} & -10p_{22} \\ p_{11} - p_{12} & p_{12} - p_{22} \end{bmatrix} \\ - \frac{1}{1} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -20p_{12} & p_{11} - p_{12} - 10p_{22} \\ -10p_{22} + p_{11} - p_{21} & 2p_{12} - 2p_{22} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} p_{12}^2 & p_{12}p_{22} \\ p_{22}p_{12} & p_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -p_{12}^2 - 20p_{12} + 300 & -p_{12}p_{22} + p_{11} - p_{12} - 10p_{22} \\ -p_{12}p_{22} + p_{11} - p_{12} - 10p_{22} & -p_{22}^2 + 2p_{12} - 2p_{22} + 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -p_{12}^2 - 20p_{12} + 300 = 0 & (1) \\ -p_{12}p_{22} + p_{11} - p_{12} - 10p_{22} = 0 & (2) \\ -p_{22}^2 + 2p_{12} - 2p_{22} + 60 = 0 & (3) \end{cases}$$

(1) 式より

$$-p_{12}^2 - 20p_{12} + 300 = 0$$

$$\Rightarrow (p_{12} - 30)(p_{12} + 10) = 0 \Rightarrow p_{12} = -30, 10$$

(i) $p_{12} = -30$ のとき

$$(3) \text{ 式より } -p_{22}^2 - 60 - 2p_{22} + 60 = 0$$

$$\Rightarrow p_{22}^2 + 2p_{22} = 0 \Rightarrow p_{22} = 0, -2$$

(2) 式より

$$p_{22} = 0 \text{ のとき } p_{11} + 30 = 0 \Rightarrow p_{11} = -30$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} -30 & -30 \\ -30 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -30 < 0, \quad |P_1| = -900 \\ \text{正定でない} \end{array}$$

$$p_{22} = -2 \text{ のとき } -60 + p_{11} + 30 + 20 = 0 \Rightarrow p_{11} = 10$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 10 & -30 \\ -30 & -2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 10 < 0, \quad |P_2| = -20 - 900 < 0 \\ \text{正定でない} \end{array}$$

(i) $p_{12} = 10$ のとき

$$(3) \text{ 式より } -p_{22}^2 + 20 - 2p_{22} + 60 = 0$$

$$\Rightarrow p_{22}^2 + 2p_{22} - 80 = 0$$

$$\Rightarrow (p_{22} + 10)(p_{22} - 8) = 0$$

$$\Rightarrow p_{22} = 8, -10$$

(2) 式より

$$p_{22} = 8 \text{ のとき } -80 + p_{11} - 10 - 80 = 0 \Rightarrow p_{11} = 170$$

$$P_3 = \begin{bmatrix} 170 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} 170 > 0, \quad |P_3| = 1360 - 100 > 0 \\ \text{正定} \end{array}$$

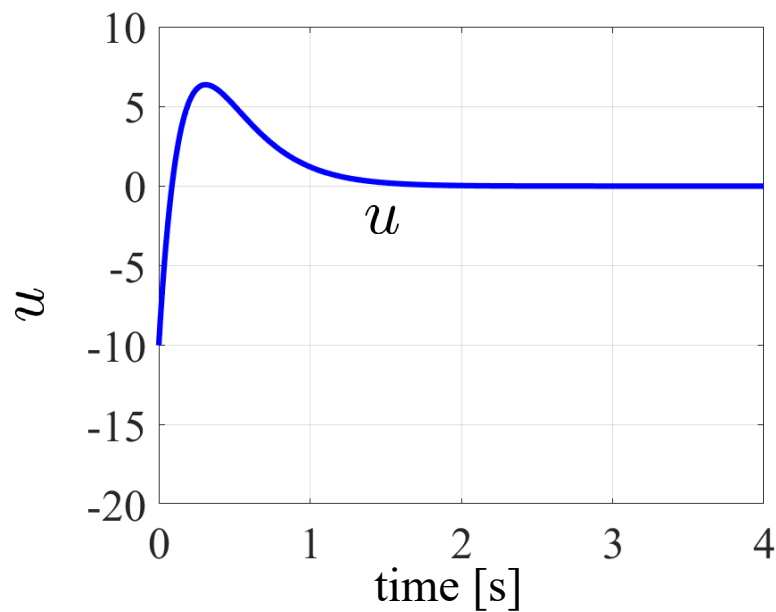
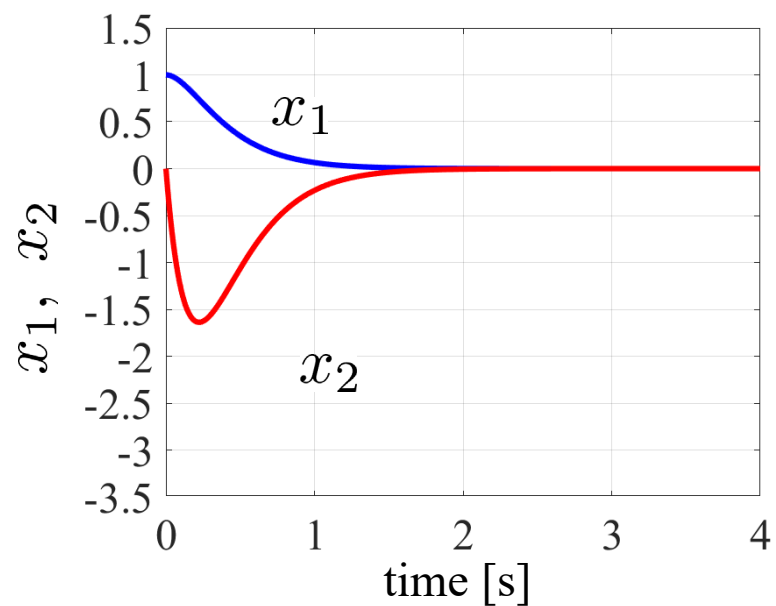
$$p_{22} = -10 \text{ のとき } 100 + p_{11} - 10 + 100 = 0 \Rightarrow p_{11} = -190$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} -190 & 10 \\ 10 & -10 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} -190 < 0, \quad |P_4| = 1900 - 100 > 0 \\ \text{正定でない} \end{array}$$

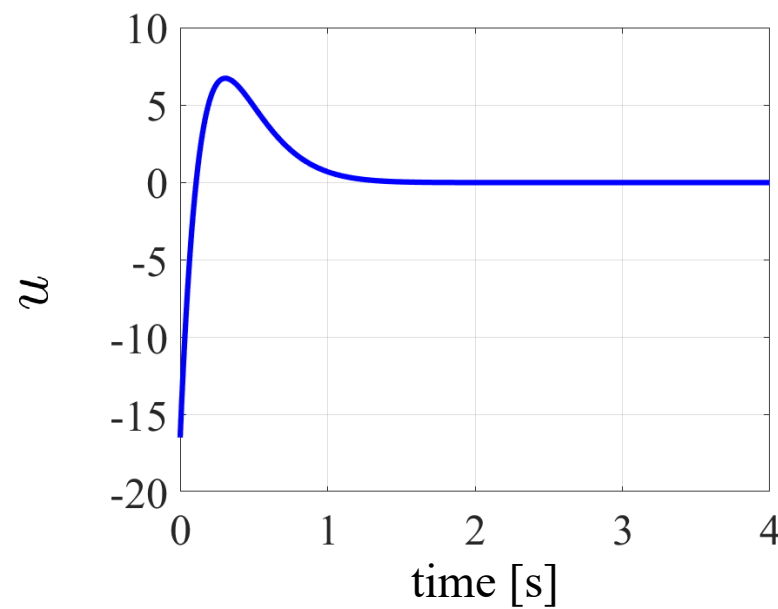
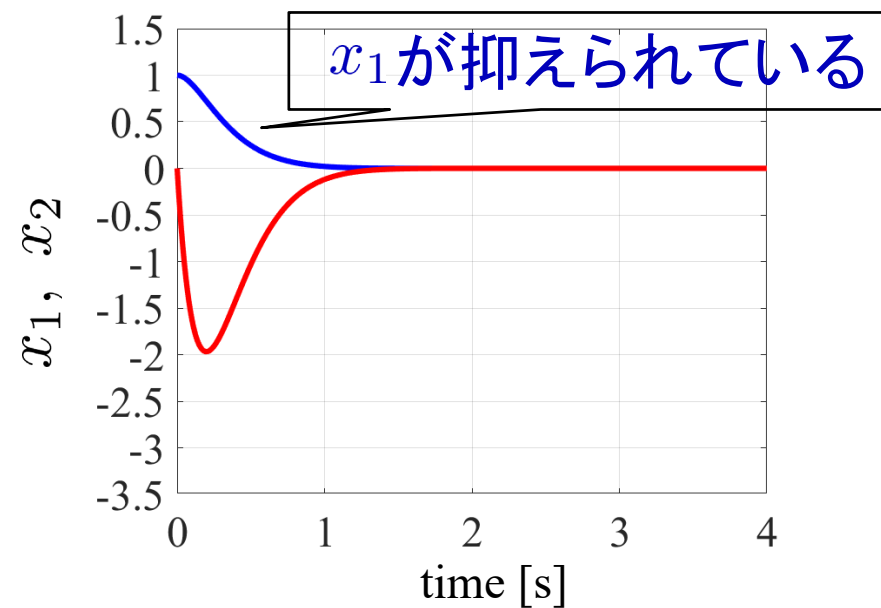
P_3 のみが正定

$$k = -R^{-1} B^T P = -\frac{1}{r} b^T P_3 = -\frac{1}{1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 170 & 10 \\ 10 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -8 \end{bmatrix}$$

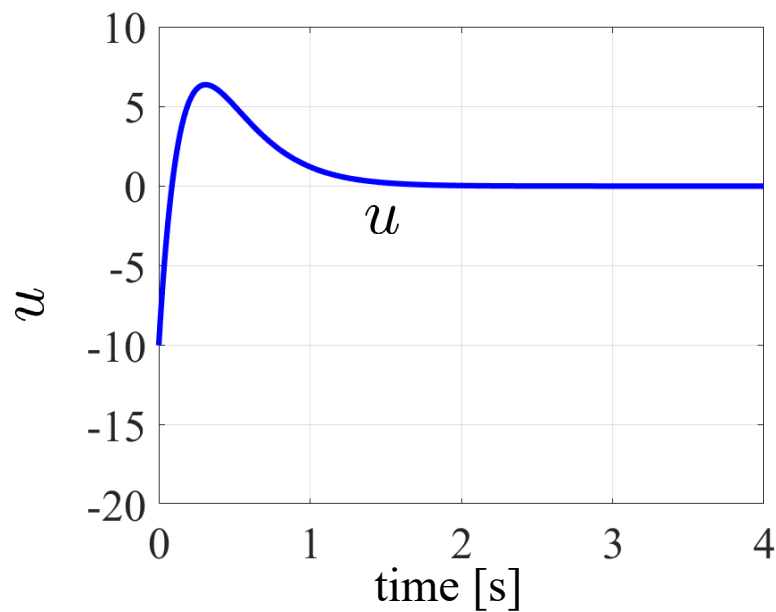
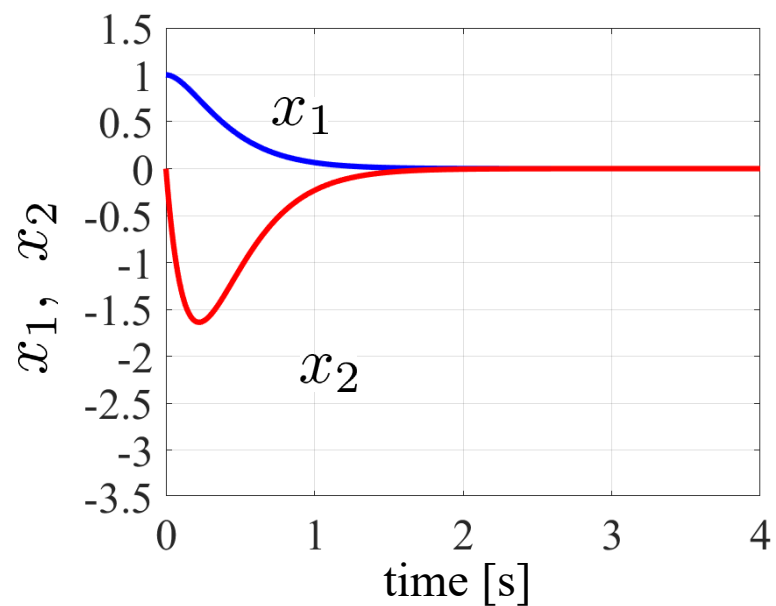
$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1 > 0$$



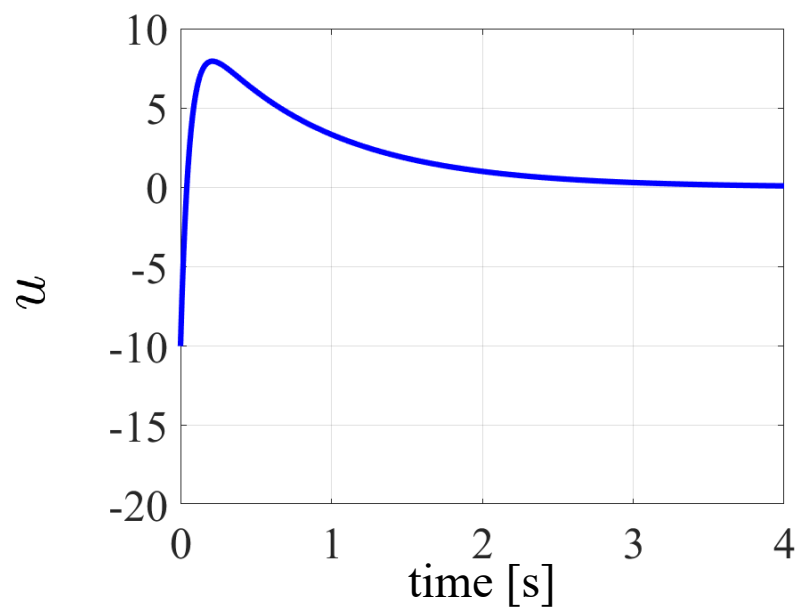
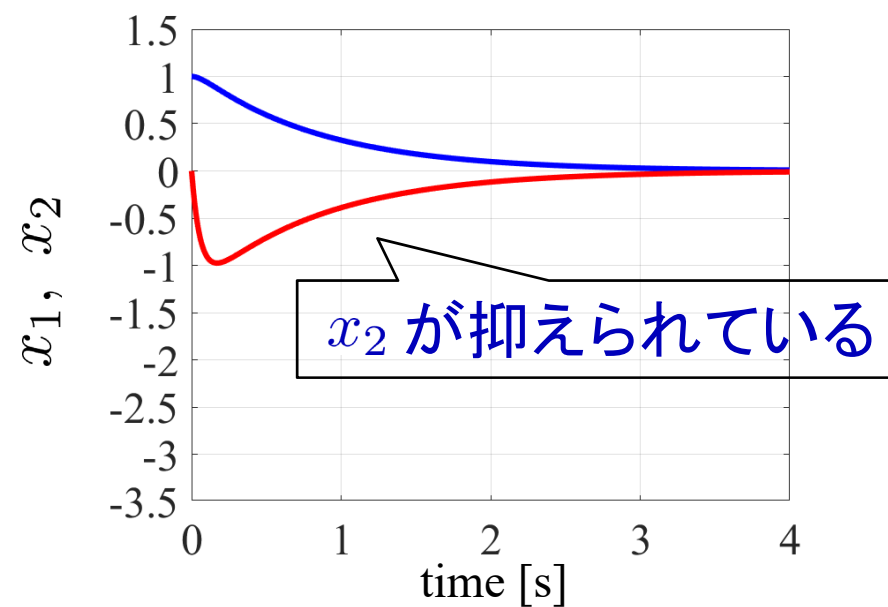
$$Q = \begin{bmatrix} 600 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1 > 0$$



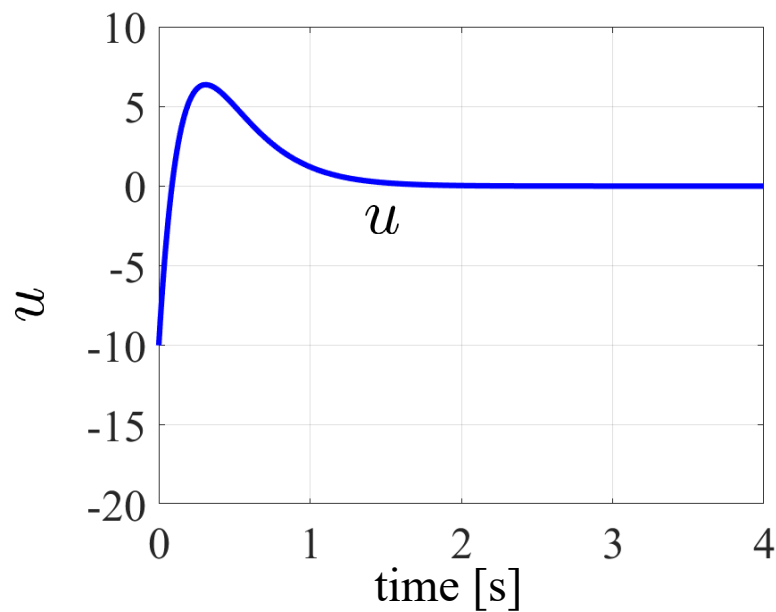
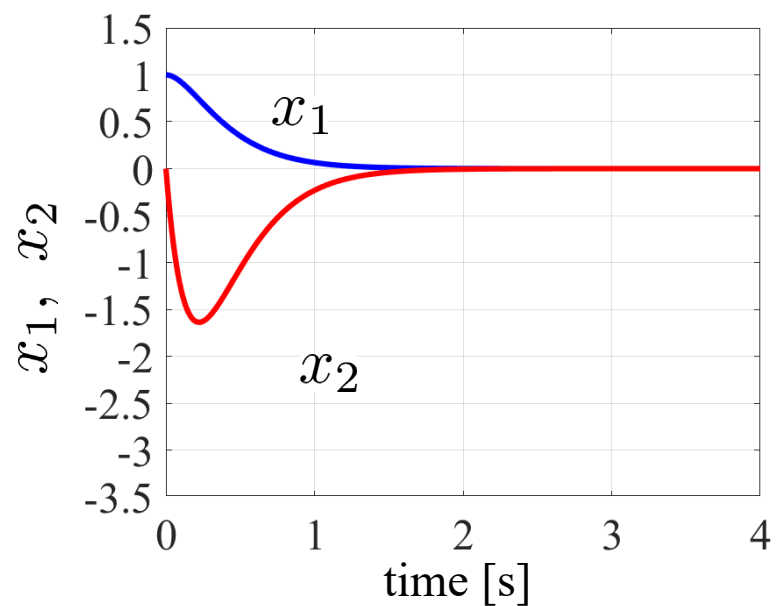
$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1 > 0$$



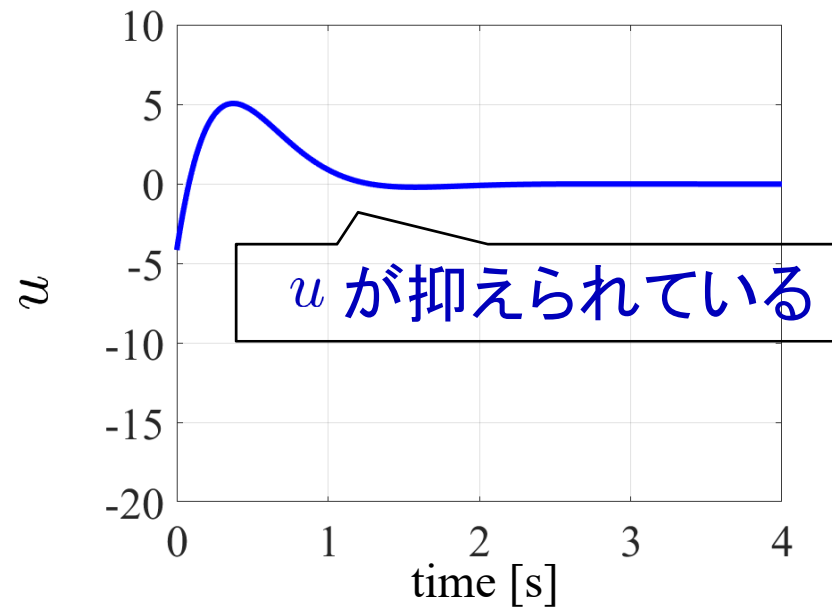
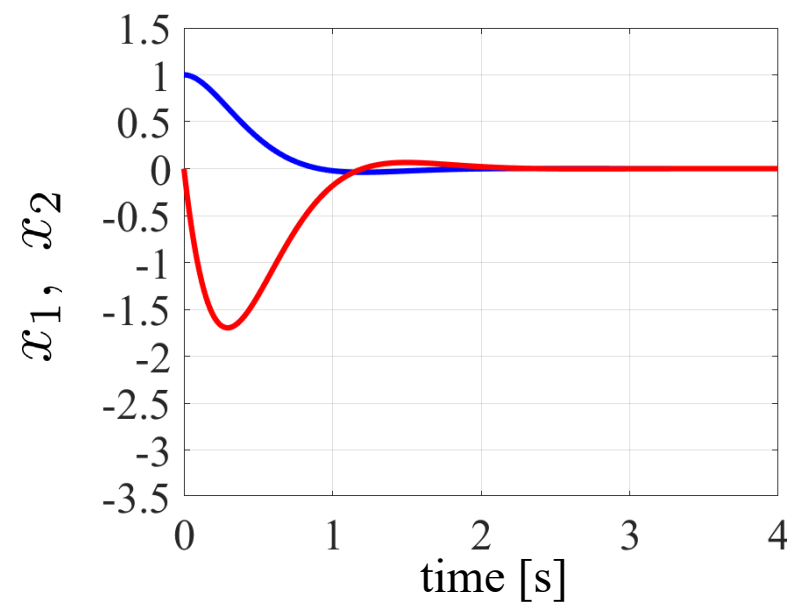
$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & \textcolor{red}{300} \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1 > 0$$



$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \quad r = 1 > 0$$



$$Q = \begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 60 \end{bmatrix} > 0, \quad r = \mathbf{3} > 0$$



[MATLAB演習]

8.4.1 リカッチ方程式と最適レギュレータ

(8.4.2 リカッチ方程式の数値解法(有本-ポッターの方法))

第 8 章 最適レギュレータ

8.1 最適レギュレータ(LQ最適制御)によるコントローラ設計

キーワード：最適レギュレータ, 最適制御

学習目標：最適レギュレータによるコントローラの設計法を習得する。