第 6 章 オブザーバと出力フィードバック

6.1 問題設定

6.2 微分信号を利用した状態の復元

6.3 同一次元オブザーバによる状態推定

6.4 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

キーワード：オブザーバ

学習目標：状態が検出できないときに，観測量の時間微分を利用した状態推定を習得する。同一次元オブザーバを用いた状態推定と出力フィードバック制御を習得する。

1

6 オブザーバと出力フィードバック

6.1 問題設定

コントローラ

システム

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), & x(0)=x_0\\ \eta(t)=x(t)\end{cases}$$

$\eta(t)$：観測量

$$\mathcal{K}:\ u(t)=Kx(t)$$

$x(t)$ の一部しか検出できない

$$\mathcal{P}:\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), & x(0)=x_0\\ \eta(t)=\bar{C}x(t)\end{cases}$$

［例6.1］

$$\eta(t)=\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}}_{\bar{C}}\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

2

6 オブザーバと出力フィードバック

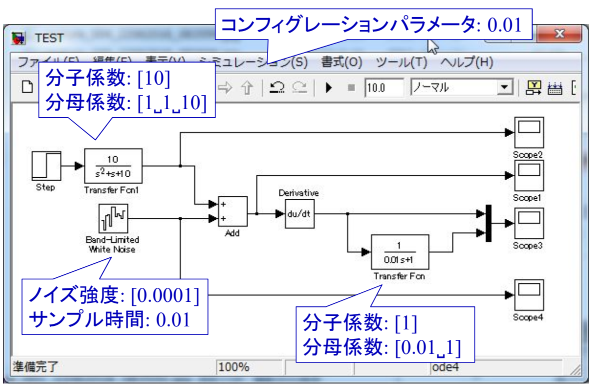
6.2 微分信号を利用した状態の復元

差分近似

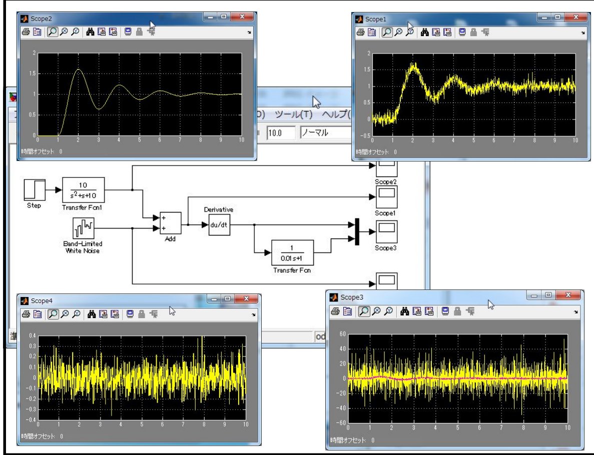
$$\omega_i(t)=\dot{\theta}_i(t)=\lim_{t\to 0}\frac{\theta_i(t)-\theta_i(t-\Delta t)}{t-(t-\Delta t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\theta_i(t)-\theta_i(t-\Delta t)}{\Delta t}$$

$$\omega_i[k]\approx\frac{\theta_i[k]-\theta_i[k-1]}{\Delta t},\quad (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

3



4



5

$$\eta(t)=\bar{C}x(t)$$

$$\begin{aligned}\dot{\eta}(t)&=\bar{C}\dot{x}(t)=\bar{C}(Ax(t)+Bu(t))\\&=\bar{C}Ax(t)+\bar{C}Bu(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\eta}(t)&=\bar{C}A\dot{x}(t)+\bar{C}B\dot{u}(t)=\bar{C}A(Ax(t)+Bu(t))+\bar{C}B\dot{u}(t)\\&=\bar{C}A^2x(t)+\bar{C}ABu(t)+\bar{C}B\dot{u}(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta^{n-1}(t)=\bar{C}A^{n-1}x(t)+\bar{C}A^{n-2}Bu(t)+\cdots\\ +\bar{C}Bu^{(n-3)}(t)+\bar{C}Bu^{(n-2)}(t)\end{aligned}$$

6

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\eta(t)\\ \dot\eta(t)\\ \ddot\eta(t)\\ \vdots\\ \eta^{(n-1)}(t)\end{bmatrix}}_{\alpha(t)\in R^{rn}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\bar C\\ \bar CA\\ \bar CA^2\\ \vdots\\ \bar CA^{n-1}\end{bmatrix}}_{V_O\in R^{rn\times n}} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \bar CB & 0 & \cdots & 0\\ \bar CAB & \bar CB & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \bar CA^{n-2}B & \bar CA^{n-3}B & \cdots & \bar CB\end{bmatrix}}_{E\in R^{rn\times p(n-1)}} \underbrace{\begin{bmatrix}u(t)\\ \dot u(t)\\ \ddot u(t)\\ \vdots\\ u^{(n-2)}(t)\end{bmatrix}}_{\beta(t)\in R^{p(n-1)}}$$

$$V_O x(t) = \alpha(t) - E\beta(t)$$

$$V_O^T V_O x(t) = V_O^T(\alpha(t) - E\beta(t))$$

$\mathrm{rank} V_O = n$ （列フルランク）

$$x(t) = (V_O^T V_O)^{-1} V_O^T(\alpha(t) - E\beta(t))$$

1出力システムのとき

$$x(t) = V_O^{-1} V_O^{T\,-1} V_O^T(\alpha(t) - E\beta(t)) = V_O^{-1}(\alpha(t) - E\beta(t))$$

[例6.2]

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot x(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \eta(t) = \bar c x(t) \end{cases}, \quad \bar c = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_O = \begin{bmatrix}\bar c\\ \bar cA\\ \bar cA^2\\ \bar cA^3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -2 & -1\\ -6 & -1 & 6 & 1\end{bmatrix}$$

$$|V_O| = 4 \neq 0$$

$$x(t) = (V_O^T V_O)^{-1} V_O^T(\alpha(t) - E\beta(t))$$

$$V_O = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$V_O^T V_O = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$V_O^T V_O$ は正方行列となるので，逆行列を取ることができる。

[MATLAB演習]

6.5.1　可観測性

6 オブザーバと出力フィードバック

6.3 同一次元オブザーバによる状態推定

観測量 $\eta(t)$ の微分は，ノイズが大きい。そこで，入出力信号から状態 $x(t)$ を推定する

システム

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot x(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar C x(t) \end{cases}$$

$\hat x(t)$: $x(t)$ の推定値

$$\dot{\hat x}(t) = A\hat x(t) + Bu(t)$$

推定誤差 $\varepsilon(t) = x(t) - \hat x(t)$

$$\begin{aligned}\dot\varepsilon(t) &= \dot x(t) - \dot{\hat x}(t) = (Ax(t) + Bu(t)) - (A\hat x(t) + Bu(t))\\ &= A\varepsilon(t)\end{aligned}$$

初期状態 $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$

$$\varepsilon(t) = e^{At}\varepsilon_0$$

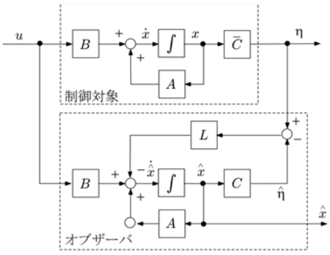
$$\varepsilon(t) = e^{At}\varepsilon_0$$

A が安定行列でない場合，推定誤差が発散する。

収束の速さが A の固有値に依存する。

同一次元オブザーバ

制御対象の入力 $u(t)$ だけでなく，出力信号 $\eta(t)$ も利用し，出力信号 $\eta(t)$ とその推定値 $\hat\eta(t) = \bar C\hat x(t)$ との差を利用して推定誤差 $\varepsilon(t)$ を補正したもの



$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \hat{\eta}(t))$$
$$= A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t))$$

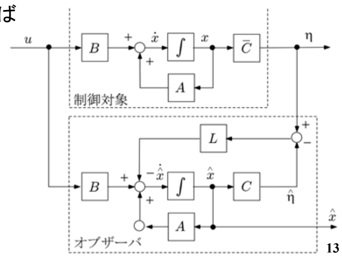
$$\dot{\varepsilon}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t)$$
$$= (Ax(t) + Bu(t)) - \{A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t))\}$$
$$= (A + L\bar{C})\varepsilon(t)$$

オブザーバゲイン L を選べば

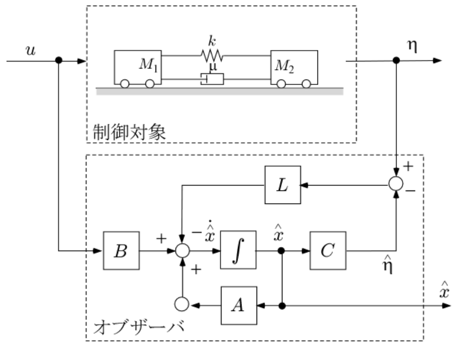
$$\varepsilon(t) = e^{(A+L\bar{C})t}\varepsilon(t) \to 0$$
$$\Rightarrow \ \hat{x}(t) \ \to \ x(t)$$

可検出：L が存在すること

$$\hat{x}(t) \ \to \ x(t)$$



13



14

可観測性の定義

線形システム(6.3)式に対し，有限の時間 $t = t_f$ までの入出力データ $u(t)$, $\eta(t)$ $(0 \le t \le t_f)$ を観測することによって，初期状態 x_0を一意に決定できるとき，“システムが可観測である”という。また，システムが可観測でないとき，“システムが不可観測である”という。

可観測性の判別

可観測性行列 $V_o = \begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \vdots \\ \bar{C}A^{n-1} \end{bmatrix} \in R^{nr \times n}$

可観測性グラミアン $W_o := \int_0^{t_f} e^{A^T\tau}\bar{C}^T\bar{C}e^{A\tau}d\tau \in R^{n\times n}$

(a) 可観測性行列 V_o が次式を満足する

$$\mathrm{rank}V_o = n$$

(b) 可観測性グラミアン $W_o(t_f)$ が正則である。

15

［ 例6.3 ］

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix}$$

(1) 角度センサによりアームの角度 $x_1(t) = \theta(t)$のみが検出される。

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \eta(t) = \bar{c}x(t) \end{cases}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V_O = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad |V_O| = 1 \neq 0$$

(2) 角速度センサによりアームの角度 $x_2(t) = \dot{\theta}(t)$ のみが検出される。

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \\ \eta(t) = \bar{c}x(t) \end{cases}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$V_O = \begin{bmatrix} \bar{c} \\ \bar{c}A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\mu}{J} \end{bmatrix} \qquad |V_O| = 0$$

16

オブザーバゲインの設計

制御対象(6.3)式が可観測であるとき，$A + L\bar{C}$ の固有値を任意の指定した値に配置できる

双対システム

$$\mathcal{P}_d : \begin{cases} \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u_d(t) \\ y_d(t) = C_d x_d(t) \end{cases} \qquad \begin{aligned} A_d &:= A^T \in R^{n\times n} \\ B_d &:= \bar{C}^T \in R^{n\times r} \\ C_d &:= \bar{B}^T \in R^{p\times n} \end{aligned}$$

$$V_{cd} := \begin{bmatrix} B_d & A_dB_d & \cdots & A_d^{n-1}B_d \end{bmatrix}$$

可制御性行列と同じ

$$= \begin{bmatrix} \bar{C}^T & A^T\bar{C}^T & \cdots & (A^{n-1})^T\bar{C}^T \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \bar{C}^T & (\bar{C}A)^T & \cdots & (\bar{C}A^{n-1})^T \end{bmatrix}$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{C} \\ \bar{C}A \\ \vdots \\ \bar{C}A^{n-1} \end{bmatrix}}_{V_o^T}$$

17

$\mathrm{rank}V_{cd} = n$ を満足すれば，可観測である

コントローラ

$$\mathcal{K}_d : u_d = K_d x_d(t), \quad K_d := L^T$$

により，

$$A_d + B_d K_d = A^T + \bar{C}^T L^T = (A + L\bar{C})^T$$

の固有値を，任意の指定した値に配置可能

$$\mathrm{rank}V_{cd}^T = \mathrm{rank}V_o = n$$

可観測性と極配置の実現可能性

(i) 線形システム(6.3)式が可観測である。

(ii) L を適当に選ぶことにより，$A + L\bar{C}$ の固有値を，任意の値に設定可能（極配置が可能）である。

18

[例 6.4]

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + bu(t) - l(\eta(t) - \bar{c}\hat{x}(t))$$

$$\dot{\varepsilon}(t) = (A + l\bar{c})\varepsilon(t),\quad \varepsilon(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

$$(A + l\bar{c}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & 1 \\ l_2 & -10 \end{bmatrix}$$

$$|\lambda I - (A + l\bar{c})| = \lambda^2 + (10 - l_1)\lambda - 10l_1 - l_2 = 0$$

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - p_1)(\lambda - p_2) = \lambda^2 - (p_1 + p_2)\lambda + p_1p_2$$

$$\begin{cases} 10 - l_1 = -(p_1 + p_2) \\ -10l_1 - l_2 = p_1p_2 \end{cases}$$

$$l = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + p_1 + p_2 \\ -10(10 + p_1 + p_2) - p_1p_2 \end{bmatrix}$$

19

6 オブザーバと出力フィードバック

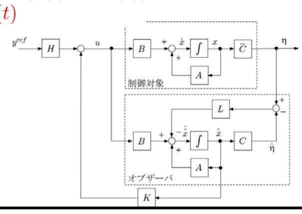
6.4 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

システム

$$\mathcal{P}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ \eta(t) = \bar{C}x(t) \end{cases}$$

出力フィードバック形式のコントローラ

$$\mathcal{K}: \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t)) \\ u(t) = \underbrace{K}_{C_k}\hat{x}(t) + Hy^{ref}(t) \end{cases}$$

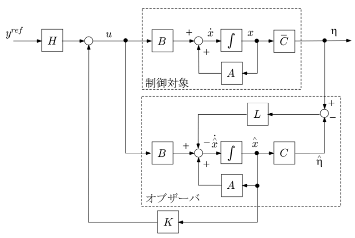


20

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + B(K\hat{x}(t) + Hy^{ref}(t)) - L(\eta(t) - \bar{C}\hat{x}(t))$$

$$= \underbrace{(A + BK + L\bar{C})}_{A_k}\hat{x}(t) \underbrace{- L}_{B_k}\eta(t) + BHy^{ref}(t)$$

$$\mathcal{K}: \begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A_k\hat{x}(t) + B_k\eta(t) + BHy^{ref} \\ u(t) = C_k\hat{x}(t) + Hy^{ref}(t) \end{cases}$$



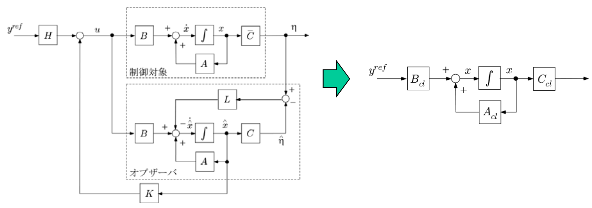
21

$\mathcal{P}$と$\mathcal{K}$ からなるシステム

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ax(t) + B(C_k\hat{x}(t) + Hy^{ref}(t)) \\ A_k\hat{x}(t) + B_k\bar{C}x(t) + BHy^{ref}(t) \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_k \\ B_k\bar{C} & A_k \end{bmatrix}}_{A_{cl}} \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}}_{x_{cl}} + \underbrace{\begin{bmatrix} BH \\ BH \end{bmatrix}}_{B_{cl}} y^{ref}(t)$$

$$\dot{x}_{cl}(t) = A_{cl}x_{cl}(t) + B_{cl}y^{ref}(t)$$



22

$$\dot{\xi}_{cl}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}}_{T_{cl}} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\xi}_{cl}(t) = T_{cl}\dot{x}_{cl}(t) = T_{cl}A_{cl}x_{cl}(t) + T_{cl}B_{cl}y^{ref}(t)$$

$$= \underbrace{T_{cl}A_{cl}T_{cl}^{-1}}_{\bar{A}_{cl}}\xi_{cl}(t) + \underbrace{T_{cl}B_{cl}}_{\bar{B}_{cl}}y^{ref}(t)$$

$$= \bar{A}_{cl}\xi_{cl}(t) + \bar{B}_{cl}y^{ref}(t)$$

$$\bar{A}_{cl} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & BK \\ -L\bar{C}A & A + BK + L\bar{C} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A + L\bar{C} \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_{cl} = \begin{bmatrix} BH \\ 0 \end{bmatrix}$$

23

$$|\lambda I - \bar{A}_{cl}| = \begin{vmatrix} \lambda I - (A + BK) & BK \\ 0 & \lambda I - (A + L\bar{C}) \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{|\lambda I - (A + BK)|}_{\text{状態フィードバックの極}}\ \underbrace{|\lambda I - (A + L\bar{C})|}_{\text{オブザーバを用いたときの極}} = 0$$

分離定理

状態フィードバックゲイン K とオブザーバゲイン L を独立に設計できる

24

[例 6.5]

$$\mathcal{P}:\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+bu(t)\\ y(t)=cx(t)\\ \eta(t)=\bar{c}x(t)\end{array}\right.,\quad c=\bar{c}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$A+bk$ の固有値が $-2\pm 2j,\ -2\pm j$ となる状態フィードバックゲイン k を設計

$A+l\bar{c}$ の固有値が $-4\pm 4j,\ -4\pm 2j$ となるオブザーバゲイン l を設計

$$\mathcal{K}:\left\{\begin{array}{l}\dot{\hat{x}}(t)=A\hat{x}(t)+bu(t)-l(\eta(t)-\bar{c}\hat{x}(t))\\ u(t)=k\hat{x}(t)+hy^{ref}(t)\end{array}\right.$$

$$h=\begin{bmatrix}-k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & b\\ c & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

25

$$k=\begin{bmatrix}-\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{11}{2}\end{bmatrix},\quad h=10$$

$$\Delta(\lambda)=(\lambda+4-4j)(\lambda+4+4j)(\lambda+4-2j)(\lambda+4+2j)$$
$$=\lambda^4+16\lambda^3+116\lambda^2+416\lambda+640$$

$$\delta_3=16,\ \delta_2=116,\ \delta_1=416,\ \delta_0=640$$

$$\Delta A=A^4+\delta_3A^3+\delta_2A^2+\delta_1A+\delta_0I$$
$$=\begin{bmatrix}356 & 222 & 284 & 194\\ -500 & 106 & 500 & 534\\ 142 & 97 & 498 & 319\\ 250 & 267 & -250 & 373\end{bmatrix}$$

26

[MATLAB演習]

6.5.2 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

27

第 6 章 オブザーバと出力フィードバック

6.1 問題設定

6.2 微分信号を利用した状態の復元

6.3 同一次元オブザーバによる状態推定

6.4 同一次元オブザーバを利用した出力フィードバック制御

キーワード：オブザーバ

学習目標：状態が検出できないときに，観測量の時間微分を利用した状態推定を習得する。同一次元オブザーバを用いた状態推定と出力フィードバック制御を習得する。

28