2022年度 前期 電気回路II 第13回資料

第 24 章 : 非正弦波交流　* 3年生電気回路Iのテキスト
第 4 章 : 非正弦波交流　* 問題集「電気回路」

- 非正弦波交流
- フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード : フーリエ級数

学習目標 : フーリエ級数を理解できる。

1

24. 非正弦波交流

フーリエ級数

$f(t)=f(t+T)$ であるとき, $f(t)$ は次の三角級数に展開することができる。

$$f(t)=a_0+a_1\cos\omega t+a_2\cos 2\omega t+a_3\cos 3\omega t+\cdots$$
$$+b_1\sin\omega t+b_2\sin 2\omega t+b_3\sin 3\omega t+\cdots$$
$$=\underline{a_0}+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{a_n}\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}\underline{b_n}\sin n\omega t$$

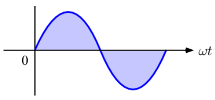
フーリエ係数

$$\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

2

展開関数の直交性

$$\int_0^T \sin n\omega t dt=0 \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$ 面積が 0



$$\int_0^T \cos n\omega t dt=0 \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$ 面積が 0

$$\int_0^T \sin m\omega t\cdot\cos n\omega t\ dt=0$$
$$=\int_0^T\frac{1}{2}\left\{\sin(m+n)\omega t+\sin(m-n)\omega t\right\}\ dt$$
$$=\underbrace{\int_0^T\frac{1}{2}\sin(m+n)\omega t\ dt}_{=0}+\underbrace{\int_0^T\frac{1}{2}\sin(m-n)\omega t\ dt}_{=0}=0$$

3

$$\int_0^T \sin m\omega t\cdot\sin n\omega t\ dt=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \frac{T}{2} & (m=n)\end{cases}$$

$m\neq n$ のとき

$$\int_0^T \sin m\omega t\cdot\sin n\omega t\ dt$$
$$=\int_0^T\left[-\frac{1}{2}\left\{\cos(m+n)\omega t-\cos(m-n)\omega t\right\}\right]\ dt=0$$

$m=n$ のとき

$$\int_0^T \sin m\omega t\cdot\sin n\omega t\ dt$$
$$=\int_0^T\sin^2 n\omega t=\int_0^T\frac{1}{2}(1-\cos 2n\omega t)\ dt=\frac{T}{2}$$

4

$$\int_0^T \cos m\omega t\cdot\cos n\omega t\ dt=\begin{cases}0 & (m\neq n)\\ \frac{T}{2} & (m=n)\end{cases}$$

$m\neq n$ のとき

$$\int_0^T \cos m\omega t\cdot\cos n\omega t\ dt$$
$$=\int_0^T\frac{1}{2}\left\{\cos(m+n)\omega t+\cos(m-n)\omega t\right\}\ dt=0$$

$m=n$ のとき

$$\int_0^T \cos m\omega t\cdot\cos n\omega t\ dt$$
$$=\int_0^T\cos^2 n\omega t=\int_0^T\frac{1}{2}(1+\cos 2n\omega t)\ dt=\frac{T}{2}$$

5

$f(t)=f(t+T)$ のとき

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\omega t$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \qquad b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$$

$\theta=\omega t$ のとき $T=2\pi$

$$f(\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\theta+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\theta$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$$

6

【補足】

$\theta = \omega t$ より $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \ dt = \dfrac{d\theta}{\omega}$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

t	$0 \to T$
θ	$0 \to \omega T (= 2\pi)$

$$= \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta \frac{d\theta}{\omega}$$
$$= \frac{2}{\omega T}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta d\theta$$
$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta d\theta$$

フーリエ係数の決定

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$\int_0^T f(t)\ dt = \int_0^T a_0\ dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right)\ dt$$
$$= a_0 T$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt$$

$$\int_0^T f(t)\cos n\omega t\ dt$$
$$= \int_0^T a_0 \cos n\omega t\ dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \cos n\omega t\ dt$$
$$= \int_0^T a_n \cos n\omega t \cdot \cos n\omega t\ dt$$
$$= \frac{T}{2} a_n$$

よって

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\ dt$$

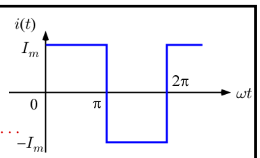
$$\int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt$$
$$= \int_0^T a_0 \sin n\omega t + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \sin n\omega t\ dt$$
$$= \int_0^T b_n \sin n\omega t \cdot \sin n\omega t\ dt$$
$$= \frac{T}{2} b_n$$

よって

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt$$

対称波 $f(t) = -f(t+\pi)$ のとき

半周期 $\dfrac{T}{2}$

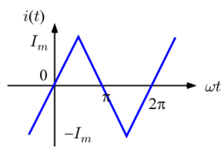


直流成分 $a_0 = 0$

奇数次高調波成分のみ $n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

奇関数波 $f(t) = -f(-t)$ のとき



直流成分 $a_0 = 0$

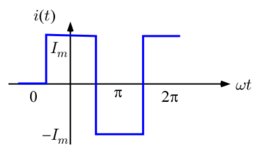
cos 成分 $a_n = 0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

偶関数波 $f(t) = f(-t)$ のとき

sin 成分 $b_n = 0$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$



【補足】

フーリエ係数を求めることは，部分分数展開と同じ

部分分数展開

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

$$a = \underline{(x+1)}f(x)\big|_{x=-1} = \left.\frac{1}{x+2}\right|_{x=-1} = \frac{1}{1} = 1$$

自分の持っている関数を全体に掛けて打ち消す

フーリエ係数

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

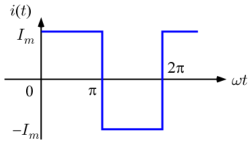
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

b_n を求めるには，自分の関数 $\sin n\omega t$ を掛けて打ち消す

13

［ 例題 1 ］

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$



$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\omega t\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m \sin n\omega\ dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)\sin n\omega t\ dt\right) \\ &= \frac{I_m}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\ &= -\frac{I_m}{n\omega\pi}(\cos n\omega\pi - 1 - (\cos 2n\omega\pi - \cos n\omega\pi)) \end{aligned}$$

$T = 2\pi$ より $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$

14

$$\begin{aligned} b_n &= -\frac{I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1 - (\cos 2n\pi - \cos n\pi)) \\ &= -\frac{I_m}{n\pi}(-1 + 2\cos n\pi - \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1}) \\ &= -\frac{I_m}{n\pi}(2\cos n\pi - 2) \\ &= -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1) \end{aligned}$$

$n = 1 \quad b_1 = \dfrac{-2I_m}{\pi}(\cos\pi - 1) = \dfrac{4I_m}{\pi}$

$n = 2 \quad b_2 = -\dfrac{2I_m}{2\pi}(\cos 2\pi - 1) = 0$

$n = 3 \quad b_3 = \dfrac{-2I_m}{3\pi}(\cos 3\pi - 1) = \dfrac{4I_m}{3\pi}$

15

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n\omega t\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m \cos n\omega t dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)\cos n\omega t dt\right) \\ &= \frac{I_m}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \\ &= \frac{I_m}{n\pi}(\sin n\pi - 0 - (\sin 2n\pi - \sin n\pi)) \\ &= \frac{I_m}{n\pi}(2\sin n\pi - \sin 2n\pi) \end{aligned}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$n = 1 \quad a_1 = \dfrac{I_m}{\pi}(2\sin\pi - \sin 2\pi) = 0$

$n = 2 \quad a_2 = \dfrac{I_m}{\pi}(2\sin 2\pi - \sin 4\pi) = 0$

16

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)dx\right) = 0 \end{aligned}$$

よって

$$f(t) = \frac{4}{\pi}I_m\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

方形波の第 n 次調波の振幅は基本波の $\dfrac{1}{n}$

17

第 24 章 ：非正弦波交流

＊3年生電気回路Iのテキスト

24.1 非正弦波交流

24.2 正弦波の組み合わせと波形

24.3 フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード：フーリエ級数

学習目標：フーリエ級数を理解できる。

18

対称波と知っている場合

n は奇数のみ

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin nx dx$$
$$= \frac{2I_m}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}\right)$$
$$= -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

19

対称波と考えない場合

$$b_n = -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$
$$b_1 = \frac{-2I_m}{\pi}(\cos \pi - 1) = \frac{4I_m}{\pi}$$
$$b_2 = -\frac{2I_m}{2\pi}(\cos 2\pi - 1) = 0$$
$$b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi}(\cos 3\pi - 1) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

対称波と知っている場合

$$b_n = -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$
$$b_1 = \frac{-2I_m}{\pi}(\cos \pi - 1) = \frac{4I_m}{\pi}$$
$$b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi}(\cos 3\pi - 1) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

20

対称波と考えない場合

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)\cos nx dx\right)$$
$$= \frac{I_m}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$
$$= \frac{I_m}{n\pi}(\sin n\pi - 0 - (\sin 2n\pi - \sin n\pi))$$
$$= \frac{I_m}{n\pi}(2\sin n\pi - \sin 2n\pi)$$
$$a_1 = \frac{I_m}{\pi}(2\sin \pi - \sin 2\pi) = 0$$
$$a_2 = \frac{I_m}{\pi}(2\sin 2\pi - \sin 4\pi) = 0$$

対称波と知っている場合

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \cos nx dx$$
$$= \frac{2I_m}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}$$
$$= \frac{2I_m}{n\pi}\sin n\pi$$
$$a_1 = \frac{2I_m}{\pi}\sin 2\pi = 0$$
$$a_3 = \frac{2I_m}{3\pi}\sin 3\pi = 0$$

21

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)dx\right) = 0$$

$$a_0 = 0$$

よって

$$f(x) = \frac{4}{\pi}I_m\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

方形波の第 n 次調波の振幅は基本波の $\frac{1}{n}$

22