第 24 章：非正弦波交流　＊3年生電気回路Iのテキスト
第 4 章：非正弦波交流　＊問題集「電気回路」

- 非正弦波交流
- フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード：フーリエ級数

学習目標：フーリエ級数を理解できる。

24. 非正弦波交流

フーリエ級数

$f(t) = f(t+T)$ であるとき，$f(t)$ は次の三角級数に展開することができる。

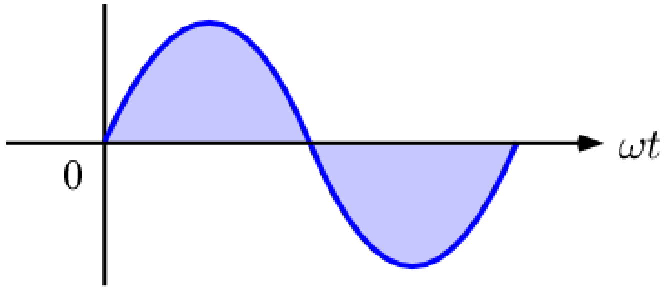
$$f(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + a_3 \cos 3\omega t + \cdots$$
$$+ b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + b_3 \sin 3\omega t + \cdots$$
$$= \underline{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{a_n} \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{b_n} \sin n\omega t$$

フーリエ係数

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

展開関数の直交性

$$\int_0^T \sin n\omega t dt = 0 \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots$$ 面積が 0



$$\int_0^T \cos n\omega t dt = 0 \qquad n = 1,\ 2,\ \cdots$$ 面積が 0

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \cos n\omega t\ dt = 0$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} \left\{ \sin(m+n)\omega t + \sin(m-n)\omega t \right\}\ dt$$

$$= \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} \sin(m+n)\omega t\ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^T \frac{1}{2} \sin(m-n)\omega t\ dt}_{=0} = 0$$

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \ dt \ = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \ dt$$

$$= \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \left\{ \cos(m+n)\omega t - \cos(m-n)\omega t \right\} \right] \ dt = 0$$

$m = n$ のとき

$$\int_0^T \sin m\omega t \cdot \sin n\omega t \ dt$$

$$= \int_0^T \sin^2 n\omega t = \int_0^T \frac{1}{2}(1 - \cos 2n\omega t) \ dt = \frac{T}{2}$$

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t \ dt \ = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{T}{2} & (m = n) \end{cases}$$

$m \neq n$ のとき

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t \ dt$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} \{\cos(m+n)\omega t + \cos(m-n)\omega t\} \ dt = 0$$

$m = n$ のとき

$$\int_0^T \cos m\omega t \cdot \cos n\omega t \ dt$$

$$= \int_0^T \cos^2 n\omega t = \int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos 2n\omega t) \ dt = \frac{T}{2}$$

$f(t) = f(t+T)$ のとき

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) dt$$

$\theta = \omega t$ のとき $T = 2\pi$

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\theta$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta d\theta$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

【補足】

$\theta = \omega t$ より $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega \quad \Rightarrow \quad dt = \dfrac{d\theta}{\omega}$

t	$0 \to T$
θ	$0 \to \omega T (= 2\pi)$

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta \frac{d\theta}{\omega} \\
&= \frac{2}{\omega T}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta d\theta \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta d\theta \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\theta d\theta
\end{aligned}
$$

フーリエ係数の決定

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$\int_0^T f(t)\ dt = \int_0^T a_0\ dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \right)\ dt$$

$$= a_0 T$$

よって

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\ dt$$

$$\int_0^T f(t) \cos n\omega t \ dt$$

$$= \int_0^T a_0 \cos n\omega t \ dt + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \cos n\omega t \ dt$$

$$= \int_0^T a_n \cos n\omega t \cdot \cos n\omega t \ dt$$

$$= \frac{T}{2} a_n$$

よって

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \ dt$$

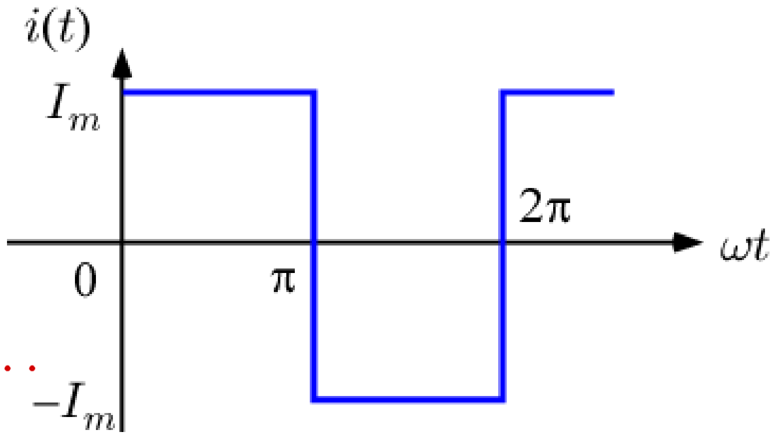
$$
\begin{aligned}
&\int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt \\
&= \int_0^T a_0 \sin n\omega t + \int_0^T \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t \right) \sin n\omega t\ dt \\
&= \int_0^T b_n \sin n\omega t \cdot \sin n\omega t\ dt \\
&= \frac{T}{2} b_n
\end{aligned}
$$

よって

$$
b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\sin n\omega t\ dt
$$

対称波 $f(t) = -f(t+\pi)$ のとき

半周期 $\dfrac{T}{2}$

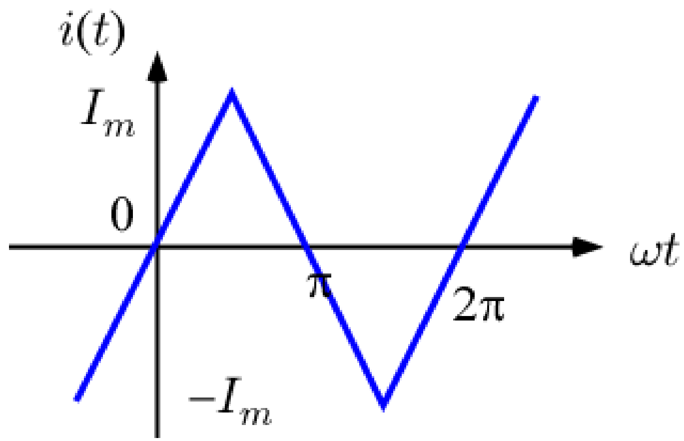


直流成分 $a_0 = 0$

奇数次高調波成分のみ $n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \qquad n = 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

奇関数波 $f(t) = -f(-t)$ のとき



直流成分 $a_0 = 0$

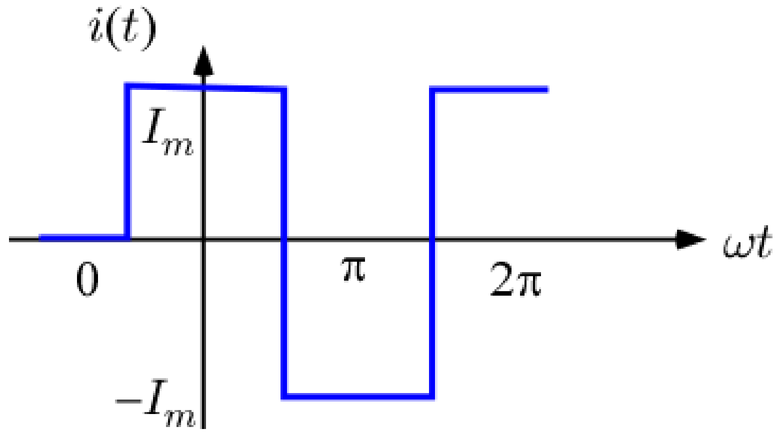
cos 成分 $a_n = 0$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

偶関数波　$f(t) = f(-t)$　のとき

sin 成分 $b_n = 0$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t$$



【補足】

フーリエ係数を求めることは，部分分数展開と同じ

部分分数展開

$$f(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$$

$$a = \underline{(x+1)}f(x)\big|_{x=-1} = \left.\frac{1}{x+2}\right|_{x=-1} = \frac{1}{1} = 1$$

自分の持っている関数を全体に掛けて打ち消す

フーリエ係数

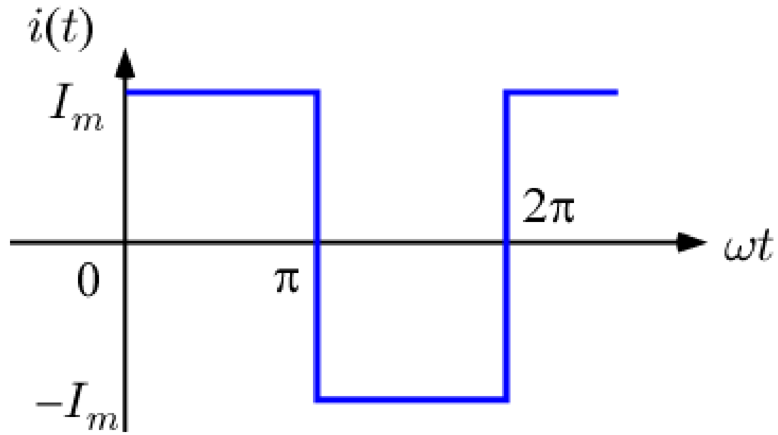
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t dt$$

b_n を求めるには，自分の関数 $\sin n\omega t$ を掛けて打ち消す

［例題 1］

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$



$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin n\omega t\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m \sin n\omega\ dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m)\sin n\omega t\ dt\right)$$

$$= \frac{I_m}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= -\frac{I_m}{n\omega\pi}\left(\cos n\omega\pi - 1 - (\cos 2n\omega\pi - \cos n\omega\pi)\right)$$

$T = 2\pi$ より $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 1$

$$b_n = -\frac{I_m}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1 - (\cos 2n\pi - \cos n\pi)\right)$$

$$= -\frac{I_m}{n\pi}\left(-1 + 2\cos n\pi - \underbrace{\cos 2n\pi}_{=1}\right)$$

$$= -\frac{I_m}{n\pi}\left(2\cos n\pi - 2\right)$$

$$= -\frac{2I_m}{n\pi}\left(\cos n\pi - 1\right)$$

$$n = 1 \qquad b_1 = \frac{-2I_m}{\pi}\left(\cos \pi - 1\right) = \frac{4I_m}{\pi}$$

$$n = 2 \qquad b_2 = -\frac{2I_m}{2\pi}\left(\cos 2\pi - 1\right) = 0$$

$$n = 3 \qquad b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi}\left(\cos 3\pi - 1\right) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n\omega t\ dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m \cos n\omega t dt + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)\cos n\omega t dt\right)$$

$$= \frac{I_m}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_{\pi}^{2\pi}\right) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 1$$

$$= \frac{I_m}{n\pi}\left(\sin n\pi - 0 - (\sin 2n\pi - \sin n\pi)\right)$$

$$= \frac{I_m}{n\pi}\left(2\sin n\pi - \sin 2n\pi\right)$$

$$n = 1 \qquad a_1 = \frac{I_m}{\pi}\left(2\sin\pi - \sin 2\pi\right) = 0$$

$$n = 2 \qquad a_2 = \frac{I_m}{\pi}\left(2\sin 2\pi - \sin 4\pi\right) = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)dx\right) = 0$$

よって

$$f(t) = \frac{4}{\pi}I_m\left(\sin\omega t + \frac{1}{3}\sin 3\omega t + \frac{1}{5}\sin 5\omega t + \cdots\right)$$

方形波の第 n 次調波の振幅は基本波の $\dfrac{1}{n}$

第 24 章 :非正弦波交流　＊3年生電気回路Iのテキスト

24.1 非正弦波交流

24.2 正弦波の組み合わせと波形

24.3 フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード : フーリエ級数

学習目標 : フーリエ級数を理解できる。

対称波と知っている場合

n は奇数のみ

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \sin nx dx \\
&= \frac{2I_m}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}\right) \\
&= -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1)
\end{aligned}
$$

対称波と考えない場合

$$b_n = -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$b_1 = \frac{-2I_m}{\pi}(\cos \pi - 1) = \frac{4I_m}{\pi}$$

$$b_2 = -\frac{2I_m}{2\pi}(\cos 2\pi - 1) = 0$$

$$b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi}(\cos 3\pi - 1) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

対称波と知っている場合

$$b_n = -\frac{2I_m}{n\pi}(\cos n\pi - 1)$$

$$b_1 = \frac{-2I_m}{\pi}(\cos \pi - 1) = \frac{4I_m}{\pi}$$

$$b_3 = \frac{-2I_m}{3\pi}(\cos 3\pi - 1) = \frac{4I_m}{3\pi}$$

対称波と考えない場合

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m \cos nx dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-I_m)\cos nx dx\right)$$

$$= \frac{I_m}{\pi}\left(\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_{\pi}^{2\pi}\right)$$

$$= \frac{I_m}{n\pi}(\sin n\pi - 0 - (\sin 2n\pi - \sin n\pi))$$

$$= \frac{I_m}{n\pi}(2\sin n\pi - \sin 2n\pi)$$

$$a_1 = \frac{I_m}{\pi}(2\sin\pi - \sin 2\pi) = 0$$

$$a_2 = \frac{I_m}{\pi}(2\sin 2\pi - \sin 4\pi) = 0$$

対称波と知っている場合

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} I_m \cos nx dx$$

$$= \frac{2I_m}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2I_m}{n\pi}\sin n\pi$$

$$a_1 = \frac{2I_m}{\pi}\sin 2\pi = 0$$

$$a_3 = \frac{2I_m}{3\pi}\sin 3\pi = 0$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} I_m dx + \int_{\pi}^{2\pi}(-I_m)dx\right) = 0$$

$$a_0 = 0$$

よって

$$f(x) = \frac{4}{\pi}I_m\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

方形波の第 n 次調波の振幅は基本波の $\frac{1}{n}$