スライド1

第 24 章：非正弦波交流

24.1 非正弦波交流
24.2 正弦波の組み合わせと波形
24.3 フーリエ級数による非正弦波の展開

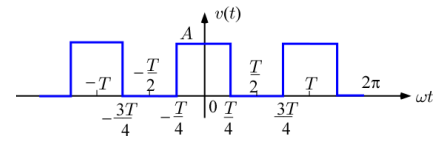キーワード：対称波, 奇関数波, 偶関数波

学習目標：対称波, 奇関数波, 偶関数波のフーリエ級数を計算できる。

スライド2

[問題30.1](1)

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

【解法1】偶関数とは知らずに求める

a_0 を求める

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\,dt\right)$$

$$= \frac{A}{T}\left([t]_0^{\frac{T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right) = \frac{A}{T}\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \frac{A}{2}$$

スライド3

a_n を求める

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\cos n\omega t\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\cos n\omega t\,dt\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right) \qquad \omega T = 2\pi \text{ より}$$

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left(\sin n\omega \frac{T}{4} - \underset{=0}{\underline{\sin 0}} + \sin n\omega T - \sin n\omega \frac{3T}{4}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$a_n = \frac{2A}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4} + \underset{=0}{\underline{\sin 2\pi n}} - \sin\frac{6\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \underset{=\sin\frac{\pi n}{2}}{\underline{\sin\frac{3\pi n}{2}}}\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

スライド4

b_n を求める

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin n\omega t\,dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\sin n\omega t\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\sin n\omega t\,dt\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}(-\cos n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{1}{n\omega}(-\cos n\omega t)\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right)$$

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left(\cos n\omega \frac{T}{4} - \underset{=1}{\underline{\cos 0}} + \cos n\omega T - \cos n\omega \frac{3T}{4}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$b_n = \frac{2A}{2\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{4} - 1 + \underset{=1}{\underline{\cos 2\pi n}} - \cos\frac{6\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi n}\left(\underset{=0}{\underline{\cos\frac{\pi n}{2}}} - \underset{=0}{\underline{\cos\frac{3\pi n}{2}}}\right) = 0$$

スライド5

$$a_1 = \frac{2A}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{2A}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{2A}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{2A}{3\pi}$$

よって

$$v(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(1\cdot\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t + \cdots\right)$$

スライド6

【解法2】偶関数を使う

偶関数より $b_n = 0$

a_0 を求める

（A1）
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\,dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\,dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\,dt\right)$$

（A2）半周期を2倍
$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v(t)\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} A \qquad \boxed{\text{半周期が使える}}$$

（A3）周期を $-\dfrac{T}{4} \sim \dfrac{3T}{4}$ と考える
$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} v(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\,dt$$

（解法1）で解く

$$a_0 = \frac{A}{T}\left([t]_0^{\frac{T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^T\right) = \frac{A}{T}\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \frac{A}{2}$$

（解法2）で解く

$$a_0 = \frac{2A}{T}[t]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{2A}{T}\frac{T}{4} = \frac{A}{2}$$

（解法3）で解く

$$a_0 = \frac{A}{T}[t]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{A}{T}\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \frac{A}{2}$$

（A2）半周期で解く ＊（A1）全周期との違いを示す

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos n\omega t \, dt$$

$$= \frac{4}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\cos n\omega t \, dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T A\cos n\omega t \, dt\right)$$

$$= \frac{4A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\frac{3T}{4}}^T\right)$$

$$= \frac{4A}{n\omega T}\left(\sin n\omega\frac{T}{4} \underset{=0}{- \sin 0} + \sin n\omega T - \sin n\omega\frac{3T}{4}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$a_n = \frac{4A}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4} + \sin 2\pi n - \sin\frac{6\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2}\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

（A3）で解く ＊（A1）との違いを示す

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos n\omega t \, dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cos n\omega t \, dt + \int_{\frac{3T}{4}}^T A\cos n\omega t \, dt\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\frac{3T}{4}}^T\right)$$

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left(\sin n\omega\frac{T}{4} - \sin 0 + \sin n\omega T - \sin n\omega\frac{3T}{4}\right)$$

$$\underset{= +\sin n\omega\frac{T}{4}}{- \sin\left(-n\omega\frac{T}{4}\right)}$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$a_n = \frac{4A}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4} + \sin 2\pi n - \sin\frac{6\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{2A}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2}\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$