第 24 章：非正弦波交流

24.1 非正弦波交流

24.2 正弦波の組み合わせと波形

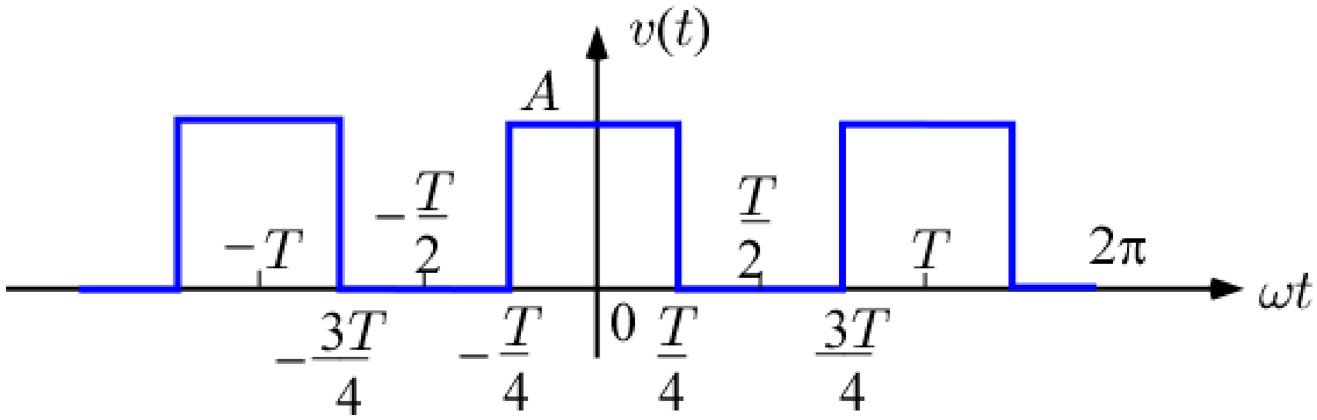
24.3 フーリエ級数による非正弦波の展開

キーワード：対称波，奇関数波，偶関数波

学習目標：対称波，奇関数波，偶関数波のフーリエ級数を計算できる。

[問題30.1](1)

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t$$

【解法1】偶関数とは知らずに求める

a_0 を求める

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)\ dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\ dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\ dt\right)$$

$$= \frac{A}{T}\left([t]_0^{\frac{T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right) = \frac{A}{T}\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \frac{A}{2}$$

a_n を求める

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos n\omega t \; dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\cos n\omega t \; dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\cos n\omega t \; dt\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left(\sin n\omega\frac{T}{4} \underbrace{- \sin 0}_{=0} + \sin n\omega T - \sin n\omega\frac{3T}{4}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$a_n = \frac{2A}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4} \underbrace{+ \sin 2\pi n}_{=0} - \sin\frac{6\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} \underbrace{- \sin\frac{3\pi n}{2}}_{=\sin\frac{\pi n}{2}}\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

b_n を求める

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\sin n\omega t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\sin n\omega t\ dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\sin n\omega t\ dt\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}(-\cos n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{4}} + \left[\frac{1}{n\omega}(-\cos n\omega t)\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right)$$

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left(\cos n\omega\frac{T}{4} - \underbrace{\cos 0}_{=1} + \cos n\omega T - \cos n\omega\frac{3T}{4}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$b_n = \frac{2A}{2\pi n}\left(\cos\frac{2\pi n}{4} - 1 + \underbrace{\cos 2\pi n}_{=1} - \cos\frac{6\pi n}{4}\right)$$

$$= \frac{A}{\pi n}\left(\underbrace{\cos\frac{\pi n}{2}}_{=0} - \underbrace{\cos\frac{3\pi n}{2}}_{=0}\right) = 0$$

$$a_1 = \frac{2A}{\pi} \sin\frac{\pi}{2} = \frac{2A}{\pi}$$

$$a_2 = \frac{2A}{2\pi} \sin\frac{2\pi}{2} = 0$$

$$a_3 = \frac{2A}{3\pi} \sin\frac{3\pi}{2} = -\frac{2A}{3\pi}$$

よって

$$v(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi}\left(1 \cdot \cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t + \cdots\right)$$

【解法2】偶関数を使う

偶関数より $b_n = 0$

a_0 を求める

（A1）

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{T} v(t)\ dt = \frac{1}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\ dt + \int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\ dt\right)$$

（A2）半周期を2倍

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v(t)\ dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} A$$

半周期が使える

（A3）周期を $-\frac{T}{4} \sim \frac{3T}{4}$ と考える

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} v(t)\ dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\ dt$$

（解法1）で解く

$$a_0 = \frac{A}{T}\left([t]_0^{\frac{T}{4}} + [t]_{\frac{3T}{4}}^{T}\right) = \frac{A}{T}\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \frac{A}{2}$$

（解法2）で解く

$$a_0 = \frac{2A}{T}[t]_0^{\frac{T}{4}} = \frac{2A}{T}\frac{T}{4} = \frac{A}{2}$$

（解法3）で解く

$$a_0 = \frac{A}{T}[t]_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} = \frac{A}{T}\left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \frac{A}{2}$$

（A2）半周期で解く ＊（A1）全周期との違いを示す

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos n\omega t\ dt$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{2}}}{T}\left(\int_0^{\frac{T}{4}} A\cos n\omega t\ dt + \cancel{\int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\cos n\omega t\ dt}\right)$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{2}}A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{4}} \cancel{+ \left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}}\right)$$

$$= \frac{\overset{4}{\cancel{2}}A}{n\omega T}\left(\sin n\omega\frac{T}{4} \underbrace{- \sin 0}_{=0} \cancel{+ \sin n\omega T - \sin n\omega\frac{3T}{4}}\right)$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$a_n = \frac{\overset{4}{\cancel{2}}A}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4} \cancel{+ \sin 2\pi n - \sin\frac{6\pi n}{4}}\right)$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{A}}}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} \cancel{- \sin\frac{3\pi n}{2}}\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$

（A3）で解く　＊（A1）との違いを示す

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos n\omega t\ dt$$

$$= \frac{2}{T}\left(\int_{\cancel{0}\ -\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} A\cos n\omega t\ dt + \cancel{\int_{\frac{3T}{4}}^{T} A\cos n\omega t\ dt}\right)$$

$$= \frac{2A}{T}\left(\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\cancel{0}\ -\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \cancel{\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_{\frac{3T}{4}}^{T}}\right)$$

$$= \frac{2A}{n\omega T}\left(\sin n\omega\frac{T}{4}\ \cancel{-\sin 0 + \sin n\omega T - \sin n\omega\frac{3T}{4}}\right)$$

$$-\sin\left(-n\omega\frac{T}{4}\right)$$

$$= +\sin n\omega\frac{T}{4}$$

$\omega T = 2\pi$ より

$$a_n = \frac{\overset{4}{\cancel{2}}A}{2\pi n}\left(\sin\frac{2\pi n}{4}\ \cancel{+\sin 2\pi n - \sin\frac{6\pi n}{4}}\right)$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{A}}}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2}\ \cancel{-\sin\frac{3\pi n}{2}}\right) = \frac{2A}{\pi n}\sin\frac{\pi n}{2}$$